
VIA · VERITAS · VITA



Gulielmus Howie

IN·CLASSE Physicâ

VNIVERSITATIS·GLASGVENSIS·

ALVMNVS·

INGENIO·AC·LABORE·

INSIGNIS·

PRAEMIVM·HOCCE·

MERITO·CONSECVTVS·EST·

TESTE·

Gul^o Thomson

APVD·COLL·GLASGVAE·

KAL·MAIIS·MDCCCLXV



Glasgow University Prize Certif —
with prize label for physics awarded
by Wm. Thomson [Baron Kelvin] — the celebrated
British physicist

Science
£11/4/-

914

MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, *de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*



A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

AVERTISSEMENT.

On a déja plusieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci est entiérement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, & l'art de résoudre les problêmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problême. J'espere que la maniere dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laissera rien à desirer.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité; il réunira & présentera sous un même point de vue, les différens Principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Méchanique, en montrera la liaison & la dépendance mutuelle, & mettra à portée de juger de leur justesse & de leur étendue.

Je le divise en deux Parties; la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, & la Dynamique ou la Théorie

du Mouvement ; & chacune de ces Parties traitera ſéparément des Corps ſolides & des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expoſe ne demandent ni conſtructions, ni raiſonnemens géométriques ou méchaniques, mais ſeulement des opérations algébriques, aſſujetties à une marche réguliere & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyſe, verront avec plaiſir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, & me ſauront gré d'en avoir étendu ainſi le domaine.



TABLE.

PREMIERE PARTIE DE LA MÉCHANIQUE,

OU LA STATIQUE.

SECONDE PARTIE DE LA MÉCHANIQUE,

OU LA DYNAMIQUE.

Fin de la Table.

ERRATA.

Page 16, *ligne* 11, déterminées; *lis.* indéterminées.
Page 23, *ligne* 3, s'étoient joints; *lis.* étoient joints.
Idem. *ligne* 21, par la détermination; *lis.* pour la détermination.
Page 53, *ligne* 15, équation; *lis.* équations.
Page 125, *ligne* 5, je; *lis.* se.
Page 312, *ligne* 12, $A\,a'$; *lis.* $A\,\alpha'$.
Page 324, *ligne* 20, précision; *lis.* précession.
Page 424, *lig. dern.* $\sqrt[3]{\ }$; *lis.* $\sqrt[3]{-1}$.
Page 434, *ligne* 25, inexactitude; *lis.* incertitude.
Page 477, *ligne* 7, intérieure; *lis.* extérieure.
Page 478, *ligne* 10, divisées; *lis.* dirigées.
Idem. *ligne* 11, $\xi = 90° =$; *lis.* $\zeta = 90°$.
Page 504, *ligne* 7 *& suiv.*; *changez* α *en* a.

EXTRAIT DES REGISTRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du vingt-ſept Février mil ſept cent quatre-vingt-huit.

MESSIEURS DE LA PLACE, COUSIN, LE GENDRE & moi, ayant rendu compte d'un Ouvrage intitulé : *Méchanique analitique, par M. DE LA GRANGE*, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de ſon Approbation, & d'être imprimé ſous ſon Privilege.

Je certifie cet Extrait conforme aux regiſtres de l'Académie. A Paris, ce 27 Février 1788.

LE MARQUIS DE CONDORCET.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE ; A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilege pour l'impreſſion de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſeront dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement, ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes ; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, il en puiſſe être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie : Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'im-

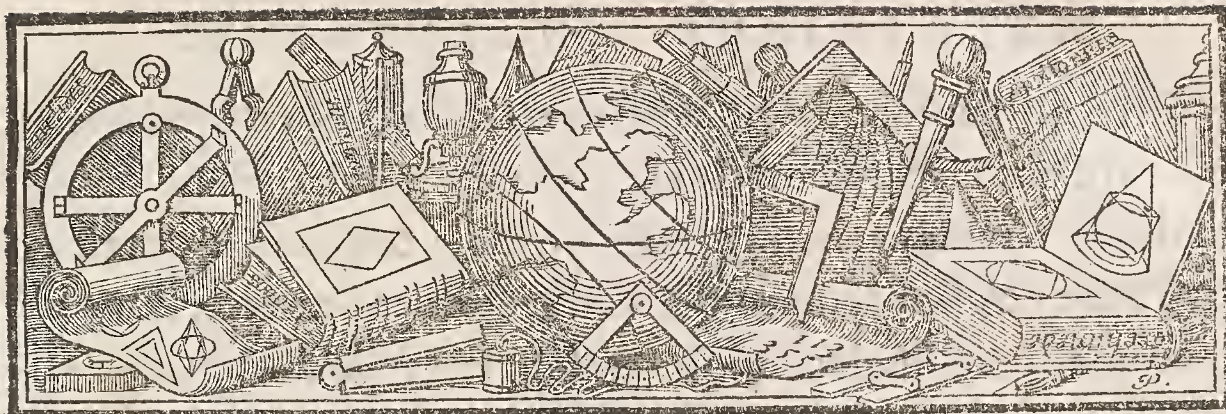
pression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposants, ou de ceux qui auront droit d'eux; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposants, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le sieur HUE DE MIROMENIL, Commandeur de nos Ordres; qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit sieur HUE DE MIROMENIL. Le tout à peine de nullité desdites Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposants & leurs ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent, sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le premier jour de Juillet, l'an de grace mil sept cent soixante-dix-huit, & de notre Regne le cinquieme. Par le Roi en son Conseil.

Signé LE BEGUE.

Registré sur le Registre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N° 1477, *folio* 582, *conformément au Réglement de* 1723, *qui fait défenses, article IV, à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; & à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires, prescrits par l'art. CVIII du même Réglement. A Paris le* 20 *Août* 1778.

Signé A. M. LOTTIN l'aîné, Syndic.

MÉCHANIQUE



MÉCHANIQUE ANALITIQUE.

PREMIERE PARTIE.

LA STATIQUE.

SECTION PREMIERE.

Sur les différens Principes de la Statique.

La Statique eſt la ſcience de l'équilibre des forces. On entend en général par *force* ou *puiſſance* la cauſe, quelle qu'elle ſoit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la ſuppoſe appliquée ; & c'eſt auſſi par la quantité du mouvement imprimé, ou prêt à imprimer, que

la force ou puiſſance doit s'eſtimer. Dans l'état d'équilibre la force n'a pas d'exercice actuel; elle ne produit qu'une ſimple tendance au mouvement; mais on doit toujours la meſurer par l'effet qu'elle produiroit ſi elle n'étoit pas arrêtée. En prenant une force quelconque, ou ſon effet pour l'unité, l'expreſſion de toute autre force n'eſt plus qu'un rapport, une quantité mathématique qui peut être repréſentée par des nombres ou des lignes; c'eſt ſous ce point de vue que l'on doit conſidérer les forces dans la Méchanique.

L'équilibre réſulte de la deſtruction de pluſieurs forces qui ſe combattent & qui anéantiſſent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes ſur les autres; & le but de la Statique eſt de donner les loix ſuivant leſquelles cette deſtruction s'opere. Ces loix ſont fondées ſur des principes généraux qu'on peut réduire à trois; celui de l'*équilibre dans le levier*, celui de *la compoſition du mouvement*, & celui des *viteſſes virtuelles*.

Archimede, le ſeul parmi les Anciens qui nous ait laiſſé quelque théorie ſur la Méchanique, dans ſes deux Livres *de Æquiponderantibus*, eſt l'auteur du principe du levier, lequel conſiſte, comme tout le monde ſait, en ce que ſi un levier droit eſt chargé de deux poids quelconques placés de part & d'autre du point d'appui à des diſtances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier ſera en équilibre, & ſon appui ſera chargé de la ſomme des deux poids. Archimede prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des diſtances égales du point d'appui, pour un axiome de Méchanique évident de ſoi-même, ou du moins pour un principe d'expérience; & il ramene à ce cas ſimple & primitif celui des poids inégaux, en imaginant ces poids lorſqu'ils ſont commenſurables, diviſés en pluſieurs parties

toutes égales entr'elles, & en ſuppoſant que les parties de chaque poids ſoient ſéparées & tranſportées de part & d'autre ſur le même levier, à des diſtances égales, enſorte que tout le levier ſe trouve chargé de pluſieurs petits poids égaux & placés à diſtances égales autour du point d'appui. Enſuite il démontre la vérité du même théorême pour les poids incommenſurables à l'aide de la méthode d'exhauſtion, en faiſant voir qu'il ne ſauroit y avoir équilibre entre ces poids, à moins qu'ils ne ſoient en raiſon inverſe de leurs diſtances au point d'appui.

Quelques modernes, comme Stevin dans ſa Statique, & Galilée dans ſes Dialogues ſur le mouvement, ont rendu la démonſtration d'Archimede plus ſimple, en ſuppoſant que les poids attachés au levier ſoient deux parallélépipèdes horizontaux pendus par leur milieu, & dont les largeurs & les hauteurs ſoient égales, mais dont les longueurs ſoient doubles des bras de levier qui leur répondent inverſement. Car de cette maniere les deux parallélépipedes ſont en raiſon inverſe de leurs bras de levier, & en même tems ils ſe trouvent placés bout-à-bout, enſorte qu'ils n'en forment plus qu'un ſeul dont le point du milieu répond préciſément au point d'appui du levier.

D'autres au contraire ont cru trouver des défauts dans la démonſtration d'Archimede, & ils l'ont tournée de différentes façons pour la rendre plus rigoureuſe. Mais ſi l'on excepte Huyghens, il n'y en a aucun qui ait mérité ſur ce point la reconnoiſſance des Géometres.

La démonſtration d'Huyghens eſt fondée ſur la conſidération de l'équilibre d'un plan chargé de pluſieurs poids égaux, & appuyé ſur une ligne droite ; mais cette démonſtration, quoique ingénieuſe & exempte des difficultés auxquelles celle d'Archi-

mede eſt ſujette, ne paroît pas encore à l'abri de toute objection; voyez le premier volume des *Opera varia* d'Huyghens.

Le principe du levier droit & horizontal une fois poſé, on en peut déduire les loix de l'équilibre dans les autres machines, & en général dans quelque ſyſtême de puiſſances que ce ſoit. C'eſt ce que pluſieurs Auteurs ont fait, ſur-tout la Hire dans ſon Traité de Méchanique, imprimé dans le IXe volume des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. Cependant il paroît qu'on n'a pas d'abord connu la maniere de réduire à la théorie du levier celle de toutes les autres machines, & ſur-tout celle du plan incliné; car non-ſeulement on voit par les fragmens qui nous ſont parvenus du huitieme Livre de Pappus, que les Anciens ignoroient le vrai rapport de la puiſſance au poids dans le plan incliné, mais on ſait que la détermination de ce rapport a été long-tems un problême parmi les premiers Mathématiciens modernes, problême dont la premiere ſolution exacte eſt due au fameux Stevin, Mathématicien du Prince Maurice de Naſſau; encore ne l'a-t-il trouvée que par une conſidération indirecte & indépendante de la théorie du levier.

Stevin conſidere un triangle ſolide poſé ſur ſa baſe horizontale; enſorte que ſes deux côtés forment deux plans inclinés; & il imagine qu'un chapelet formé de pluſieurs poids égaux, enfilés à des diſtances égales, ou plutôt une chaîne d'égale groſſeur ſoit placée ſur les deux côtés de ce triangle, de maniere que toute la partie ſupérieure ſe trouve appliquée aux deux côtés du triangle, & que la partie inférieure pende librement au-deſſous de la baſe, comme ſi elle étoit attachée aux deux extrémités de cette baſe,

Or Stevin remarque qu'en ſuppoſant même que la chaîne

puisse glisser librement sur le triangle, elle doit cependant demeurer en repos; car si elle commençoit à glisser d'elle-même dans un sens, elle devroit continuer à glisser toujours, puisque la même cause de mouvement subsisteroit, la chaîne se trouvant, à cause de l'uniformité de ses parties, placée toujours de la même maniere sur le triangle, d'où résulteroit un mouvement perpétuel, ce qui est absurde.

Il y a donc nécessairement équilibre entre toutes les parties de la chaîne; or il est évident que la portion qui pend au-dessous de la base, est déja en équilibre d'elle-même; donc il faut que l'effort de tous les poids appuyés sur l'un des côtés, contrebalance l'effort des poids appuyés sur l'autre côté; mais la somme des uns est à la somme des autres, dans le même rapport que les longueurs des côtés sur lesquels ils sont appuyés. Donc il faudra toujours la même puissance pour soutenir un ou plusieurs poids placés sur un plan incliné, lorsque le poids total sera proportionnel à la longueur du plan, en supposant la hauteur la même; mais quand le plan est vertical, la puissance est égale au poids; donc dans tout plan incliné, la puissance est au poids comme la hauteur du plan à sa longueur.

J'ai rapporté cette démonstration de Stevin, parce qu'elle est très-ingénieuse, & qu'elle est d'ailleurs peu connue. Au reste, Stevin déduit de cette théorie celle de l'équilibre entre trois puissances qui agissent sur un même point, & il fait voir que cet équilibre a lieu lorsque les puissances sont paralleles & proportionnelles aux trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque. Voyez les Élémens de Statique & les Additions à la Statique de cet Auteur dans ses *Hypomnemata Mathematica*.

Le second Principe fondamental de l'équilibre est celui de

la compoſition des mouvemens. Il eſt fondé ſur cette ſuppoſition, que ſi deux forces agiſſent à la fois ſur un corps ſuivant différentes directions, ces forces équivalent alors à une force unique, capable d'imprimer au corps le même mouvement que lui donneroient les deux forces agiſſant ſéparément. Or un corps qu'on fait mouvoir uniformément, ſuivant deux directions différentes à la fois, parcourt néceſſairement la diagonale du parallélogramme dont il eut parcouru ſéparément les côtés en vertu de chacun des deux mouvemens. D'où il s'enſuit que deux puiſſances quelconques qui agiſſent enſemble ſur un même corps, ſeront équivalentes à une ſeule repréſentée dans ſa quantité & ſa direction, par la diagonale du parallélogramme dont les côtés repréſentent en particulier les quantités & les directions des deux puiſſances données. C'eſt en quoi conſiſte le Principe qu'on nomme *la compoſition des forces*.

Ce Principe ſuffit ſeul pour déterminer les loix de l'équilibre dans tous les cas; car en compoſant ſucceſſivement toutes les forces deux à deux, on doit parvenir à une force unique, qui ſera équivalente à toutes ces forces, & qui par conſéquent devra être nulle dans le cas d'équilibre, s'il n'y a dans le ſyſtême aucun point fixe; mais s'il y en a un, il faudra que la direction de cette force unique paſſe par le point fixe. C'eſt ce qu'on peut voir dans tous les Livres de Statique, & particuliérement dans la nouvelle Méchanique de Varignon, où la théorie des machines eſt déduite uniquement du Principe dont nous venons de parler.

Il eſt évident que le théorême de Stevin ſur l'équilibre de trois forces paralleles & proportionnelles aux trois côtés d'un triangle quelconque, eſt une conſéquence immédiate & néceſ-

ſaire du principe de la compoſition des forces, ou plutôt qu'il n'eſt que ce même principe préſenté ſous une autre forme. Mais celui-ci a l'avantage d'être fondé ſur des notions ſimples & naturelles, au lieu que le théorême de Stevin ne l'eſt que ſur des conſidérations indirectes.

Quant à l'invention du Principe dont il s'agit, il me ſemble qu'on doit l'attribuer à Galilée, qui dans la ſeconde propoſition de la quatrieme journée de ſes Dialogues, démontre qu'un corps mu avec deux viteſſes uniformes, l'une horiſontale, l'autre verticale, doit prendre une viteſſe repréſentée par l'hypothènuſe du triangle dont les côtés repréſentent ces deux viteſſes; mais il paroît en même tems que Galilée n'a pas connu toute l'importance de ce théorême dans la théorie de l'équilibre. Car dans le Dialogue troiſième où il traite du mouvement des corps peſans ſur des plans inclinés, au lieu d'employer le Principe de la compoſition du mouvement pour déterminer directement la gravité relative d'un corps ſur un plan incliné, il déduit plutôt cette détermination de la théorie de l'équilibre ſur les plans inclinés, d'après ce qu'il avoit établi auparavant dans ſon Traité *della Scienza Mecanica*, dans lequel il rappelle le plan incliné au levier.

On trouve enſuite la théorie des mouvemens compoſés dans les écrits de Deſcartes, de Roberval, de Merſenne, de Wallis, &c : mais c'eſt à Varignon qu'on doit d'avoir montré l'uſage de cette théorie dans l'équilibre des machines.

Le projet d'une nouvelle Méchanique qu'il publia en 1687, n'a pour objet que de démontrer les régles de la Statique par la compoſition des mouvemens ou des forces; & cet objet a été rempli enſuite avec plus d'étendue dans la *nouvelle Méchanique* qui n'a paru qu'après ſa mort, en 1725; il avoit même

déja donné en 1685, dans l'Hiſtoire de la République des Lettres, un Mémoire ſur les poulies, où il expliquoit la théorie de ces ſortes de machines, par celle des mouvemens composés.

Je viens enfin au troiſieme Principe, celui des viteſſes virtuelles. On doit entendre par *viteſſe virtuelle*, celle qu'un corps en équilibre eſt diſpoſé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu ; c'eſt-à-dire la viteſſe que ce corps prendroit réellement dans le premier inſtant de ſon mouvement ; & le Principe dont il s'agit conſiſte en ce que des puiſſances ſont en équilibre quand elles ſont en raiſon inverſe de leurs viteſſes virtuelles, eſtimées ſuivant les directions de ces puiſſances.

Pour peu qu'on examine les conditions de l'équilibre dans le levier & dans les autres machines, il eſt facile de reconnoître la vérité de ce Principe; cependant il ne paroît pas que les Géometres qui ont précédé Galilée, en aient eu connoiſſance, & je crois pouvoir en attribuer la découverte à cet Auteur, qui dans ſon Traité *della Scienza Mecanica*, & dans ſes Dialogues ſur le mouvement, le propoſe comme une propriété générale de l'équilibre des machines. Voyez la ſcholie de la ſeconde Propoſition du troiſieme Dialogue.

Galilée entend par *moment* d'un poids ou d'une puiſſance appliquée à une machine, l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus* de cette puiſſance pour mouvoir la machine, de maniere qu'il y ait équilibre entre deux puiſſances, lorſque leurs momens pour mouvoir la machine en ſens contraires ſont égaux; & il fait voir que le moment eſt toujours proportionnel à la puiſſance multipliée par la viteſſe virtuelle, dépendante de la maniere dont la puiſſance agit.

Cette

Cette notion des momens a auſſi été adoptée par Wallis dans ſa Méchanique publiée en 1669. L'Auteur y poſe le principe de l'égalité des momens pour fondement de la Statique, & il en déduit au long la théorie de l'équilibre dans les principales machines.

Aujourd'hui on n'entend plus communément pour *moment*, que le produit d'une puiſſance par la diſtance de ſa direction à un point ou à une ligne, c'eſt-à-dire par le bras de levier par lequel elle agit; mais il me ſemble que la notion du *moment* donnée par Galilée & par Wallis, eſt bien plus naturelle & plus générale, & je ne vois pas pourquoi on l'a abandonnée pour y en ſubſtituer une autre qui exprime ſeulement la valeur du moment dans certains cas, comme dans le levier, &c.

Deſcartes a réduit pareillement toute la Statique à un Principe unique, qui revient pour le fond à celui de Galilée, mais qui eſt préſenté d'une maniere moins générale. Ce Principe eſt, qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour élever un poids à une certaine hauteur, qu'il en faudroit pour élever un poids plus peſant à une hauteur d'autant moindre, ou un poids moindre à une hauteur d'autant plus grande. (Voyez la Lettre 73 de la premiere Partie, & le Traité de Méchanique imprimé dans les Ouvrages poſthumes). D'où il réſulte qu'il y aura équilibre entre deux poids, lorſqu'ils ſeront diſpoſés de maniere que les chemins perpendiculaires qu'ils peuvent parcourir enſemble, ſoient en raiſon réciproque des poids. Mais dans l'application de ce Principe aux différentes machines, il ne faut conſidérer que les eſpaces parcourus dans le premier inſtant du mouvement, & qui ſont proportionnels aux viteſſes virtuelles; autrement on n'auroit pas les véritables loix de l'équilibre.

Au reste, soit qu'on regarde le Principe des vitesses virtuelles comme une propriété générale de l'équilibre, ainsi que l'a fait Galilée; soit qu'on veuille le prendre avec Descartes & Wallis pour la vraie cause de l'équilibre, il faut avouer qu'il a toute la simplicité qu'on peut desirer dans un principe fondamental; & nous verrons plus bas combien ce Principe est encore recommandable par sa généralité.

Torricelli, fameux disciple de Galilée, est l'auteur d'un autre Principe, qui revient cependant au même que celui de Galilée, ou qui plutôt n'en est qu'une conséquence; c'est que lorsque deux poids sont tellement liés ensemble, qu'étant placés comme l'on voudra, leur centre de gravité ne hausse ni ne baisse, ils sont en équilibre dans toutes ces situations. Torricelli ne l'applique qu'au plan incliné, mais il est facile de se convaincre qu'il n'a pas moins lieu dans les autres machines. Voyez son Traité du mouvement accéléré, qui a paru en 1644.

Le Principe de Torricelli en a fait naître un autre, dont quelques Auteurs ont fait usage pour résoudre avec plus de facilité différentes questions de Statique. C'est celui-ci: que dans un systême de corps pesans en équilibre, le centre de gravité est le plus bas qu'il est possible. En effet, on sait par la théorie *de maximis & minimis*, que le centre de gravité est le plus bas lorsque la différentielle de sa descente est nulle, ou, ce qui revient au même, lorsque ce centre ne monte ni ne descend, tandis que le systême change infiniment peu de place.

Le Principe des vitesses virtuelles peut être rendu très-général de cette maniere :

Si un systême quelconque de tant de corps ou points que

l'on veut tirés, chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, & qu'on donne à ce systême un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée, parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zero, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, & comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.

Jean Bernoulli est le premier que je sache, qui ait apperçu cette grande généralité du Principe des vitesses virtuelles, & son utilité pour résoudre les problêmes de Statique. C'est ce qu'on voit dans une de ses Lettres à Varignon, datée de 1717, que ce dernier a placée à la tête de la section neuvième de sa nouvelle Méchanique, section employée toute entiere à montrer par différentes applications la vérité & l'usage du Principe dont il s'agit.

Ce même Principe a donné lieu ensuite à celui que feu M. de Maupertuis a proposé dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1740, sous le nom de Loi de repos, & que M. Euler a développé davantage, & rendu plus général dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1751. Enfin c'est encore le même Principe qui sert de base à celui que M. le Marquis de Courtivron a donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour 1748 & 1749.

Et en général je crois pouvoir avancer que tous les principes généraux qu'on pourroit peut-être encore découvrir dans la science de l'équilibre, ne seront que le même principe des

viteſſes virtuelles, enviſagé différemment, & dont ils ne différeront que dans l'expreſſion.

Au reſte, ce Principe eſt non-ſeulement en lui-même très-ſimple & très-général; il a de plus l'avantage précieux & unique de pouvoir ſe traduire en une formule générale qui renferme tous les problêmes qu'on peut propoſer ſur l'équilibre des corps. Nous allons expoſer cette formule dans toute ſon étendue; nous tâcherons même de la préſenter d'une manière encore plus générale qu'on ne l'a fait juſqu'à préſent, & d'en donner des applications nouvelles.

SECONDE SECTION.

Formule générale pour l'équilibre d'un ſyſtême quelconque de forces; avec la maniere de faire uſage de cette formule.

1. LA loi générale de l'équilibre dans les machines, eſt que les forces ou puiſſances ſoient entr'elles réciproquement comme les viteſſes des points où elles ſont appliquées, eſtimées ſuivant la direction de ces puiſſances.

C'eſt dans cette loi que conſiſte ce qu'on appelle communément le *Principe des viteſſes virtuelles*, Principe reconnu depuis long-tems pour le Principe fondamental de l'équilibre, ainſi que nous l'avons montré dans la Section précédente, & qu'on peut par conſéquent regarder comme une eſpece d'axiome de Méchanique.

Pour réduire ce Principe en formule, ſuppoſons que des puiſſances P, Q, R, *&c.* dirigées ſuivant des lignes données,

ſe faſſent équilibre. Concevons que des points où ces puiſſances ſont appliquées, on mene des lignes droites égales à p, q, r, &c, & placées dans les directions de ces puiſſances; & déſignons en général, par dp, dq, dr, &c, les variations, ou différences de ces lignes, en tant qu'elles peuvent réſulter d'un changement quelconque infiniment petit dans la poſition des différens corps ou points du ſyſtême.

Il eſt clair que ces différences exprimeront les eſpaces parcourus dans un même inſtant par les puiſſances P, Q, R, &c, c'eſt-à-dire, les viteſſes de ces puiſſances eſtimées ſuivant leurs directions.

Cela poſé, imaginons d'abord trois puiſſances P, Q, R en équilibre, il eſt clair qu'en ſubſtituant à la place d'une quelconque de ces puiſſances un appui fixe, capable de réſiſter à l'effort commun des deux autres, l'équilibre ſubſiſtera encore; je commencerai donc par chercher les loix de l'équilibre entre deux puiſſances P & Q, en ſuppoſant que le point ſur lequel la troiſieme puiſſance agit ſoit fixe, enſorte que la ligne r demeure la même pendant que les lignes p & q deviennent $p + dp$, $q + dq$, ou $p - dp$, $q - dq$. Par le principe général, il faudra que les puiſſances P & Q ſoient entr'elles en raiſon inverſe des différentielles dp, dq; mais il eſt aiſé de concevoir qu'il ne ſauroit y avoir équilibre entre deux puiſſances, à moins qu'elles ne ſoient diſpoſées de maniere, que quand l'une d'elles ſe meut, ſuivant ſa propre direction, l'autre ne ſoit contrainte de ſe mouvoir dans un ſens contraire à la ſienne; d'où il s'enſuit que les valeurs des différences dp & dq doivent être de ſigne contraire; donc comme les valeurs des forces P & Q ſont ſuppoſées toutes deux poſitives, on aura

par l'équilibre $\frac{P}{Q} = - \frac{dq}{dp}$, ou bien $P dp + Q dq = 0$; c'eſt la formule générale de l'équilibre de deux puiſſances.

On trouvera de la même maniere, en regardant la puiſſance Q, comme appliquée à un point fixe, l'équation $P dp + R dr = 0$, pour les conditions de l'équilibre entre les puiſſances P & R. Pareillement on aura pour l'équilibre des deux puiſſances Q & R l'équation $Q dq + R dr = 0$.

On a donc pour les trois puiſſances P, Q, R, les trois équations

$$P dp + Q dq = 0, \quad P dp + R dr = 0, \quad Q dq + R dr = 0,$$

en ſuppoſant dans la premiere de ces équations r conſtante, dans la ſeconde q conſtante, & dans la troiſieme p conſtante.

D'où il s'enſuit qu'on aura en général, en faiſant varier p, q, r à la fois, l'équation $P dp + Q dq + R dr = 0$.

En effet, pour qu'il y ait équilibre entre les puiſſances P, Q, R, il faut que ces puiſſances ſoient diſpoſées de maniere que l'une ne puiſſe ſe mouvoir indépendamment des deux autres.

Il faut donc qu'il y ait une relation donnée entre les différences dp, dq, dr, & par conſéquent auſſi entre les quantités finies p, q, r; donc en vertu de cette relation, quelle qu'elle ſoit, la variable p pourra être regardée comme une fonction des deux autres variables q & r; & ſa différentielle dp pourra, par conſéquent, s'exprimer en général par $dp = m dq + n dr$. Or en faiſant r conſtante, on auroit ſimplement $dp = m dq$, & en faiſant q conſtante, on auroit $dp = n dr$; donc le terme $P dp$ qui ſe trouvera dans les deux premieres équations, pourra être repréſenté par $P m dq$ dans la premiere de ces équations, &

par $Pndr$ dans la feconde; de forte que la fomme de ces deux termes fera $P(mdq + ndr) = Pdp$. On prouvera de la même maniere, & en regardant q comme une fonction de p & r, que la fomme des deux termes Qdq qui entrent dans la premiere & dans la troifieme équation, fe réduira fimplement à Qdq, en regardant dans dq, p & r comme variables à la fois; & pareillement les deux termes Rdr qui fe trouvent dans les deux dernieres équations, fe réduiront à Rdr, (p & q étant variables à la fois dans dr). De forte que la fomme des trois équations particulieres trouvées ci-deffus, deviendra, en regardant p, q, r comme variables à la fois $Pdp + Qdq + Rdr = 0$; formule de l'équilibre de trois puiffances quelconques P, Q, R.

S'il y avoit une quatrieme puiffance S, dirigée fuivant la la ligne s, on trouveroit par un raifonnement femblable, que l'équilibre des quatre puiffances P, Q, R, S feroit renfermé dans la formule $Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0$.

Ainfi de fuite, quel que foit le nombre des puiffances en équilibre.

2. On a donc en général pour l'équilibre d'un nombre quelconque de puiffances P, Q, R, &c, dirigées fuivant les lignes p, q, r, &c, & appliquées à un fyftême quelconque de corps ou points difpofés entr'eux d'une maniere quelconque, une équation de cette forme,

$$Pdp + Qdq + Rdr + \&c = 0.$$

C'eft la formule générale de l'équilibre d'un fyftême quelconque de puiffances.

Nous nommerons chaque terme de cette formule, tel que Pdp, le *moment* de la force P, en prenant le mot de moment

dans le ſens que Galilée lui a donné, c'eſt-à-dire, pour le produit de la force par ſa viteſſe virtuelle. De ſorte que la formule générale de l'équilibre conſiſtera dans l'égalité à zero, de la ſomme des momens de toutes les forces.

3. Pour faire uſage de cette formule, la difficulté ſe réduira à déterminer, conformément à la nature du ſyſtême donné, les valeurs des différentielles dp, dq, dr, &c.

On conſidérera donc le ſyſtême dans deux poſitions différentes, & infiniment voiſines, & on cherchera les expreſſions les plus générales des différences dont il s'agit, en introduiſant dans ces expreſſions autant de quantités déterminées, qu'il y aura d'élémens arbitraires dans la variation de poſition du ſyſtême. On ſubſtituera enſuite ces expreſſions de dp, dq, dr, &c, dans l'équation propoſée, & il faudra que cette équation ait lieu, indépendamment de toutes les indéterminées, afin que l'équilibre du ſyſtême ſubſiſte en général & dans tous les ſens. On égalera donc ſéparément à zero, la ſomme des termes affectés de chacune des mêmes indéterminées; & l'on aura, par ce moyen, autant d'équations particulieres, qu'il y aura de ces indéterminées; or il n'eſt pas difficile de ſe convaincre que leur nombre doit toujours être égal à celui des quantités inconnues dans la poſition du ſyſtême; donc on aura par cette méthode, autant d'équations qu'il en faudra pour déterminer l'état d'équilibre du ſyſtême.

C'eſt ainſi qu'en ont uſé tous les Auteurs qui ont appliqué juſqu'ici le Principe des viteſſes virtuelles, à la ſolution des problêmes de Statique; mais cette maniere d'employer ce Principe, peut exiger des conſtructions & des conſidérations géométriques, qui rendent les ſolutions auſſi longues que ſi on les déduiſoit des principes ordinaires de la Statique,

que ; c'eſt peut-être la principale raiſon qui a empêché qu'on n'ait fait juſqu'ici de ce Principe tout le cas & l'uſage qu'il ſemble qu'on en auroit dû faire, vu ſa ſimplicité & ſa généralité.

4. Quelles que ſoient les forces P, Q, R, &c, qui agiſſent ſur les différens corps ou points du ſyſtême, il eſt clair qu'on peut toujours les ſuppoſer tendantes à des points placés dans les directions de ces forces, & que nous appellerons les *centres* des forces.

Ainſi pour avoir les lignes p, q, r, &c, qui repréſentent les directions des forces P, Q, R &c, il n'y aura qu'à prendre les diſtances rectilignes entre les corps ou points, ſur leſquels les forces agiſſent, & les centres de ces mêmes forces. Or ces centres peuvent être placés hors du ſyſtême, ou bien en faire partie.

Dans le premier cas il eſt viſible que les différences dp, dq, dr, &c, expriment les variations entieres des lignes p, q, r, &c, dues au changement de ſituation du ſyſtême ; elles ſont par conſéquent les différentielles complettes des quantités p, q, r, &c, en y regardant comme variables toutes les quantités relatives à la ſituation du ſyſtême, & comme conſtantes celles qui ſe rapportent à la poſition des différens centres des forces.

Dans le ſecond cas, quelques-uns des corps du ſyſtême ſeront eux-mêmes les centres des forces qui agiſſent ſur d'autres corps du même ſyſtême, & à cauſe de l'égalité entre l'action & la réaction, ces derniers corps ſeront en même tems les centres des forces qui agiſſent ſur les premiers.

Conſidérons donc deux corps qui agiſſent l'un ſur l'autre avec une force quelconque P, ſoit que cette force vienne de l'attraction ou de la répulſion de ces corps, ou d'un reſſort

placé entr'eux, ou d'une autre maniere quelconque, ſoit p la diſtance entre ces deux corps, & que dp' exprime la variation de cette diſtance, en tant qu'elle dépend du changement de ſituation de l'un des corps; il eſt clair qu'on aura relativement à ce corps, Pdp' pour le moment de la force P; de même ſi on déſigne par dp'' la variation de la même diſtance p, réſultante du changement de ſituation de l'autre corps, on aura relativement à ce ſecond corps, le moment Pdp'' de la même force P; donc le moment total dû à cette force, ſera repréſenté par $P(dp' + dp'')$; mais il eſt viſible que $dp' + dp''$ eſt la différentielle complette de p que nous déſignerons par dp, puiſque la diſtance p ne peut varier que par le déplacement des deux corps; donc le moment dont il s'agit ſera exprimé ſimplement par Pdp: on peut étendre ce raiſonnement à tant de corps qu'on voudra.

5. Il ſuit de-là que pour avoir la ſomme des momens de toutes les forces d'un ſyſtême donné, il n'y aura qu'à conſidérer en particulier chacune des forces qui agiſſent ſur les différens corps ou points du ſyſtême, & prendre la ſomme des produits de ces différentes forces multipliées chacune par la différentielle de la diſtance reſpective entre les deux termes de chaque force, c'eſt-à-dire entre le point ſur lequel agit cette force & celui d'où elle part, en regardant, dans ces différentielles, comme variables toutes les quantités qui dépendent de la ſituation du ſyſtême, & comme conſtantes celles qui ſe rapportent aux points ou centres extérieurs, c'eſt-à-dire en conſidérant ces points comme fixes, tandis qu'on fait varier la ſituation du ſyſtême. Cette quantité étant égalée à zéro, donnera la formule générale du principe de l'équilibre.

6. Pour exprimer analitiquement la même quantité, ce qui se présente de plus simple, est de rapporter la position de tous les points du systême donné à des coordonnées rectangles & parallèles à trois axes fixes dans l'espace.

Nous nommerons en général x, y, z, les coordonnées des points auxquels les forces sont appliquées, & nous les distinguerons ensuite par un ou plusieurs traits, relativement aux différens points du systême.

Nous désignerons de même par a, b, c, les coordonnées pour les centres des forces.

Il est visible que les distances p, q, r, &c, seront exprimées en général par la formule

$$\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}$$

dans laquelle les quantités a, b, c seront constantes ou du moins devront être regardées comme telles, pendant que x, y, z varient, dans le cas où elles se rapportent à des points fixes placés hors du systême; mais dans le cas où les forces partent de quelques-uns des corps du systême même, ces quantités a, b, c deviendront x''' &c, y'' &c, z''' &c, & seront par conséquent variables.

Ayant ainsi les expressions des quantités finies p, q, r, &c, en fonctions connues des coordonnées des différens corps du systême, il n'y aura plus qu'à différentier à l'ordinaire, en regardant ces coordonnées comme variables, pour avoir les valeurs cherchées des différences dp, dq, dr, &c, qui entrent dans la formule générale de l'équilibre.

Mais quoiqu'on puisse toujours regarder les forces P, Q, R, &c, comme tendantes à des centres donnés; cependant comme la considération de ces centres est étran-

gere à la queſtion, dans laquelle on ne conſidere ordinairement comme données, que la quantité & la direction de chaque force; voici des manieres plus générales d'exprimer les différences dp, dq, dr, &c.

7. Et d'abord en ſuppoſant, ce qui eſt toujours permis, que la force P tende à un centre fixe, on a

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

& de-là, en différentiant ſans que a, b, c varient

$$dp = \frac{x-a}{p}\,dx + \frac{y-b}{p}\,dy + \frac{z-c}{p}\,dz.$$

Or il eſt facile de concevoir que $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$, ne ſont autre choſe que les coſinus des angles que la ligne p fait avec les coordonnées x, y, z. Donc en général ſi on nomme α, β, γ les angles que la direction de la force P fait avec les axes des x, y, z, ou avec des parallèles à ces axes, on aura $\frac{x-a}{p} = \text{coſ.}\,\alpha$, $\frac{y-b}{p} = \text{coſ.}\,\beta$, $\frac{z-c}{p} = \text{coſ.}\,\gamma$; par conſéquent

$$dp = \text{coſ.}\,\alpha\,dx + \text{coſ.}\,\beta\,dy + \text{coſ.}\,\gamma\,dz;$$

& ainſi des autres différences dq, dr, &c.

On remarquera par rapport aux angles α, β, γ, premiérement que $\text{coſ.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\beta^2 + \text{coſ.}\,\gamma^2 = 1$, ce qui eſt évident par les formules précédentes. En ſecond lieu que ſi on nomme ε l'angle que la projection de la ligne p ſur le plan des x & y fait avec l'axe des x, il eſt clair qu'on aura $\frac{x-a}{\pi} = \text{coſ.}\,\varepsilon$, $\frac{y-b}{\pi} = \text{ſin.}\,\varepsilon$, en ſuppoſant $\pi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$; donc mettant pour $x-a$, $y-b$, leurs valeurs $p\,\text{coſ.}\,\alpha$, $p\,\text{coſ.}\,\beta$, on aura auſſi

$\pi = p \sqrt{(\text{cof.}\, \alpha^2 + \text{cof.}\, \beta^2)} = p \sqrt{(1 - \text{cof.}\, \gamma^2)} = p$ ſin. γ;

donc $\frac{x-a}{p} =$ ſin. γ cof. ϵ, $\frac{y-b}{p} =$ ſin. γ ſin. ϵ; & par conſéquent, cof. $\alpha =$ ſin. γ cof. ϵ, cof. $\beta =$ ſin. γ ſin. ϵ.

8. Je conſidere enſuite que puiſque dp repréſente le petit eſpace que le corps ou point auquel eſt appliquée la force P peut parcourir ſuivant la direction de cette force, ſi on fait $dp = 0$, ce point ne pourra plus ſe mouvoir que dans des directions perpendiculaires à celle de la même force. Donc $dp = 0$ ſera l'équation différentielle d'une ſurface à laquelle la direction de la force P ſera perpendiculaire.

Suppoſons maintenant en général que la force P agiſſe perpendiculairement à une ſurface repréſentée par l'équation différentielle $du = 0$, ſoit que du ſoit une différentielle complette ou non. Comme cette équation doit être équivalente à l'équation $dp = 0$, on aura néceſſairement $du = V dp$, V étant une fonction finie des coordonnées x, y, z. Et pour trouver cette fonction, il ſuffira de remarquer que puiſqu'on a par l'article précédent $dp =$ cof. $\alpha\, dx +$ cof. $\beta\, dy +$ cof. $\gamma\, dz$, & cof. $\alpha^2 +$ cof. $\beta^2 +$ cof. $\gamma^2 = 1$, on aura ſuivant la notation reçue pour les différences partielles, $\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 = 1$; donc auſſi $\left(\frac{du}{V dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{V dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{V dz}\right)^2 = 1$; d'où l'on tire

$$V = \sqrt{\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right)};$$

donc

$$dp = \frac{du}{V} = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}.$$

On déterminera de la même maniere les valeurs des autres différences dq, dr, &c, d'après les équations différentielles des ſurfaces auxquelles les directions des forces Q, R, &c, ſont perpendiculaires.

9. Les valeurs des différences dp, dq, dr, &c. étant connues en fonctions différentielles des coordonnées des différens corps du ſyſtême, il n'y aura qu'à les ſubſtituer dans la formule générale

$$Pdp + Qdq + Rdr + \&c, = 0,$$

& vérifier enſuite cette équation de la maniere la plus générale, & indépendante des différentielles qu'elle renferme.

Donc ſi le ſyſtême eſt entiérement libre, enſorte qu'il n'y ait aucune relation donnée entre les coordonnées des différens corps, ni par conſéquent entre leurs différentielles, il faudra ſatisfaire à l'équation précédente, indépendamment de ces différentielles, & pour cet effet égaler ſéparément à zéro la ſomme de tous les termes qui ſe trouveront multipliés par chacune d'elles; ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de coordonnées variables, & par conſéquent autant qu'il en faudra pour déterminer toutes ces variables, & connoître par leur moyen la poſition de tout le ſyſtême dans l'état d'équilibre.

10. Mais ſi la nature du ſyſtême eſt telle que les corps ſoient aſſujettis dans leurs mouvemens à des conditions particulieres, il faudra commencer par exprimer ces conditions par des équations analitiques que nous nommerons *équations de condition;* ce qui eſt toujours facile. Par exemple, ſi quelques-uns des corps étoient aſſujettis à ſe mouvoir ſur des

lignes ou des ſurfaces données, on auroit entre les coordonnées de ces corps, les équations mêmes des lignes ou des ſurfaces données; ſi deux corps s'étoient tellement joints enſemble, qu'ils duſſent toujours ſe trouver à une même diſtance k l'un de l'autre, on auroit évidemment l'équation $k^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$, & ainſi du reſte.

Les équations de condition ainſi trouvées, il faudra par leur moyen éliminer autant de différentielles qu'on pourra, dans les expreſſions de dp, dq, dr &c, enſorte que les différentielles reſtantes ſoient abſolument indépendantes les unes des autres, & n'expriment plus que ce qu'il y a d'arbitraire dans le changement de ſituation du ſyſtême. Alors comme la formule générale de l'équilibre doit avoir lieu, quel que puiſſe être ce changement, il faudra y égaler ſéparément à zéro, la ſomme de tous les termes qui ſe trouveront affectés de chacune des différentielles indéterminées; d'où il viendra autant d'équations particulieres qu'il y aura de ces mêmes différentielles; & ces équations étant jointes aux équations de condition données, renfermeront toutes les conditions néceſſaires par la détermination de l'état d'équilibre du ſyſtême; car il eſt aiſé de concevoir que toutes ces équations enſemble ſeront toujours en même nombre que les différentes variables qui ſervent de coordonnées à tous les corps du ſyſtême, & ſuffiront par conſéquent toujours pour déterminer chacune de ces variables.

11. Au reſte ſi nous avons toujours déterminé les lieux des corps par des coordonnées rectangles, c'eſt que cette maniere a l'avantage de la ſimplicité & de la facilité du calcul; mais ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe en employer d'autres dans

l'uſage de la méthode précédente ; car il eſt clair que rien n'oblige dans cette méthode à ſe ſervir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités, rélatives aux lieux des corps. Ainſi au lieu des deux coordonnées x, y, on pourra employer, lorſque les circonſtances paroîtront l'exiger, un rayon vecteur $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, & un angle φ dont la tangente ſoit $\frac{y}{x}$ (ce qui donnera $x = \rho$ coſ. φ, $y = \rho$ ſin. φ), en laiſſant ſubſiſter la troiſieme coordonnée z; ou bien on employera un rayon vecteur $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec deux angles φ & ψ, tels que tang. $\varphi = \frac{y}{x}$, tang. $\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, ce qui donnera $x = \rho$ coſ. ψ coſ. φ, $y = \rho$ coſ. ψ ſin. φ, $z = \rho$ ſin. ψ; ou d'autres angles ou lignes quelconques.

Remarquons encore que comme il n'y a proprement que la conſidération des différences dx, dy, dz qui entre dans la méthode dont il s'agit, il eſt permis d'introduire immédiatement à la place de celles-ci, d'autres expreſſions différentielles quelconques, ſoit intégrables d'elles-mêmes ou non, & ſans aucun égard aux valeurs de x, y, z.

TROISIEME

TROISIEME SECTION.

Propriétés générales de l'équilibre déduites de la formule précédente.

1. CONSIDÉRONS un ſyſtême ou aſſemblage quelconque de corps ou points, qui étant tirés par des puiſſances quelconques, ſe faſſent mutuellement équilibre. Si dans un inſtant l'action de ces puiſſances ceſſoit d'être détruite, le ſyſtême commenceroit à ſe mouvoir, & quel que pût être ſon mouvement, on pourroit toujours le concevoir comme composé, 1° d'un mouvement de tranſlation commun à tous les corps; 2° d'un mouvement de rotation autour d'un point quelconque; 3° des mouvemens relatifs des corps entr'eux, par leſquels ils changeroient leur poſition, & leurs diſtances mutuelles. Il faut donc pour l'équilibre que les corps ne puiſſent prendre aucun de ces différens mouvemens. Or il eſt clair que les mouvemens relatifs dépendent de la maniere dont les corps ſont diſpoſés les uns par rapport aux autres; par conſéquent les conditions néceſſaires pour empêcher ces mouvemens, doivent être particulieres à chaque ſyſtême. Mais les mouvemens de tranſlation & de rotation peuvent être indépendans de la forme du ſyſtême, & s'exécuter ſans que la diſpoſition & liaiſon mutuelle des corps en ſoit dérangée.

Ainſi la conſidération de ces deux eſpeces de mouvemens doit fournir des conditions ou propriétés générales de l'équilibre. C'eſt ce que nous allons examiner.

2. Soient donc un nombre quelconque de corps regardés comme des points, & diſpoſés ou liés entr'eux comme l'on voudra, leſquels ſoient tirés par les puiſſances P, P', P'', &c, ſuivant les directions des lignes p, p', p'', &c. On aura (Sect. précéd.) pour l'équilibre de ces corps, la formule

$$P\,dp + P'\,dp' + P''\,dp'' + \&c = 0.$$

Soient maintenant x, y, z les coordonnées rectangles du point tiré par la puiſſance P; x', y', z' celles du point tiré par la puiſſance P', & ainſi de ſuite; ces coordonnées étant toutes paralléles à trois axes fixes, & ayant pour origine un même point.

Soient de plus α, β, γ les angles que la ligne p ou la direction de la puiſſance P fait avec les axes des x, y, z; α', β', γ', les angles que la direction de P' fait avec les mêmes axes, & ainſi de ſuite.

On aura (Sect. précéd. art. 7),

$$dp = \text{coſ.}\,\alpha\,dx + \text{coſ.}\,\beta\,dy + \text{coſ.}\,\gamma\,dz$$
$$dp' = \text{coſ.}\,\alpha'\,dx' + \text{coſ.}\,\beta'\,dy' + \text{coſ.}\,\gamma'\,dz'$$
$$dp'' = \text{coſ.}\,\alpha''\,dx'' + \text{coſ.}\,\beta''\,dy'' + \text{coſ.}\,\gamma'\,dz'',$$
&c.

Et la formule de l'équilibre deviendra,

$$0 = P\,(\text{coſ.}\,\alpha\,dx + \text{coſ.}\,\beta\,dy + \text{coſ.}\,\gamma\,dz)$$
$$+ P'\,(\text{coſ.}\,\alpha'\,dx' + \text{coſ.}\,\beta'\,dy' + \text{coſ.}\,\gamma'\,dz')$$
$$+ P''\,(\text{coſ.}\,\alpha''\,dx'' + \text{coſ.}\,\beta''\,dy'' + \text{coſ.}\,\gamma''\,dz''$$
$$+ \&c.$$

3. Faiſons, ce qui eſt permis,

$$x' = x + \xi,\ y' = y + \eta,\ z' = z + \zeta$$

$$x'' = x + \xi', y'' = y + \eta', z'' = z + \zeta',$$

&c.

ſubſtituant ces valeurs dans la formule précédente, on aura cette transformée,

$$\begin{aligned} o = & (P \cos. \alpha + P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + \&c) dx. \\ & + (P \cos. \beta + P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta'' + \&c) dy \\ & + (P \cos. \gamma + P' \cos. \gamma' + P'' \cos. \gamma'' + \&c) dz \\ & + P' (\cos. \alpha' d\xi + \cos. \beta' d\eta + \cos. \gamma' d\zeta) \\ & + P'' (\cos. \alpha'' d\xi' + \cos. \beta'' d\eta' + \cos. \gamma'' d\zeta'), \\ & \&c. \end{aligned}$$

Or x, y, z étant les coordonnées abſolues du corps tiré par la force P, il eſt clair que ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', &c, ne ſeront autre choſe que les coordonnées relatives des autres corps par rapport à celui-ci pris pour leur origine commune ; de ſorte que la poſition mutuelle des corps ne dépendra que de ces dernieres coordonnées, & nullement des premieres. Donc ſi on ſuppoſe le ſyſtême entièrement libre, c'eſt-à-dire, les corps ſimplement liés entr'eux d'une maniere quelconque, mais ſans qu'ils ſoient retenus ou empêchés par des appuis fixes, ou des obſtacles extérieurs quelconques, il eſt aiſé de concevoir que les conditions réſultantes de la nature du ſyſtême, ne pourront regarder que les quantités ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', &c, & nullement les quantités x, y, z, dont les différentielles demeureront par conſéquent indépendantes & indéterminées.

Ainſi dans l'équation précédente, il faudra égaler ſéparément à zero, chacun des membres affectés de dx, dy, dz; ce qui donnera ces trois équations particulieres.

$$P \text{ cos. } \alpha + P' \text{ cos. } \alpha' + P'' \text{ cos. } \alpha'' + \&c = 0.$$
$$P \text{ cos. } \beta + P' \text{ cos. } \beta' + P'' \text{ cos. } \beta'' + \&c = 0$$
$$P \text{ cos. } \gamma + P' \text{ cos. } \gamma' + P'' \text{ cos. } \gamma'' + \&c = 0,$$

lesquelles devront nécessairement avoir lieu dans l'équilibre d'un systême libre. Ce sont les équations nécessaires pour empêcher le mouvement de translation.

4. Si les puissances P, P', P'', &c, étoient parallèles, on auroit $\alpha = \alpha' = \alpha''$ &c, $\beta = \beta' = \beta''$ &c, $\gamma = \gamma' = \gamma''$, &c, & les trois équations précédentes se réduiroient à celle-ci,

$$P + P' + P'' + \&c. = 0.$$

laquelle montre que la somme des forces parallèles doit être nulle.

En général il est facile de concevoir que P représentant l'action totale de la puissance P suivant sa propre direction, P cos. α représentera son action relative, estimée suivant la direction de l'axe des x, laquelle fait avec la direction de la force l'angle α; de même P cos. β & P cos. γ, seront les actions relatives de la même force, estimées suivant les directions des axes des y & z, & ainsi du reste.

Et de-là résulte ce théorême, que *la somme des puissances estimées suivant la direction de trois axes perpendiculaires entr'eux, doit être nulle par rapport à chacun de ces axes, dans l'équilibre d'un systême libre.*

5. Prenons maintenant, ce qui est permis, à la place des coordonnées x, y, x', y', x'', y'', &c, des rayons vecteurs ρ, ρ', ρ'', &c, avec les angles $\varphi, \varphi', \varphi''$, &c, que ces rayons font avec l'axe des x; on aura, comme l'on sait, $x = \rho$ cos. φ, $y = \rho$ sin. φ, & de même $x' = \rho'$ cos. φ', $y' = \rho'$ sin. φ', &c. Donc $dx =$ cos. $\varphi d\rho - y d\varphi$, $dy =$ sin. $\varphi d\rho + x d\varphi$, $dx' =$

$\cos. \varphi' d\rho' - y' d\varphi'$, $dy' = \sin. \varphi' d\rho' + x' d\rho'$, &c. Et l'équation de l'art. 2 deviendra par ces ſubſtitutions,

$$\begin{aligned} 0 = & P (x \cos. \beta - y \cos. \alpha) d\varphi + P' (x' \cos. \beta' - y' \cos. \alpha') d\varphi' \\ & + P'' (x'' \cos. \beta'' - y'' \cos. \alpha'') d\varphi'' + \&c. \\ & + P (\cos. \varphi \cos. \alpha + \sin. \varphi \cos. \beta) d\rho + P' (\cos. \varphi' \cos. \alpha' + \sin. \varphi' \cos. \beta) d\rho' \\ & + P'' (\cos. \varphi'' \cos. \alpha'' + \sin. \varphi'' \cos. \beta'') d\rho'' + \&c. \\ & + P \cos. \gamma dz + P' \cos. \gamma' dz' + P'' \cos. \gamma'' dz'' + \&c. \end{aligned}$$

Or ſi l'on fait $\varphi' = \varphi + \sigma$, $\varphi'' = \varphi + \sigma'$, &c. il eſt viſible que σ, σ', &c. ſeront les angles que les rayons ρ, ρ', ρ'', &c. forment avec le rayon ρ; par conſéquent les diſtances des corps, tant entr'eux, que par rapport au plan des x, y, & au point qui eſt l'origine des coordonnées, dépendront ſimplement des quantités ρ, ρ', ρ'', &c, σ, σ', &c, z, z', z'', &c. Donc ſi le ſyſtême a la liberté de tourner autour de ce point, parallélement au plan des x, y, c'eſt-à-dire, autour de l'axe des z, qui eſt perpendiculaire à ce plan, l'angle φ ſera indéterminé, & la différence $d\varphi$ arbitraire. D'où il ſuit que le membre affecté de $d\varphi$ dans l'équation précédente, devra être en particulier égal à zéro.

6. On aura donc ainſi l'équation,

$$\begin{aligned} & P (x \cos. \beta - y \cos. \alpha) + P' (x' \cos. \beta' - y' \cos. \alpha') \\ & + P' (x'' \cos. \beta'' - y'' \cos. \alpha'') + \&c = 0; \end{aligned}$$

laquelle devra avoir lieu dans l'équilibre de tout ſyſtême qui a la liberté de tourner autour de l'axe des z.

On trouvera de la même maniere, par rapport à l'axe des y, ſi le ſyſtême a la liberté de tourner autour de cet axe, l'équation

$$P\,(x \operatorname{cof.} \gamma - z \operatorname{cof.} \alpha) + P'\,(x' \operatorname{cof.} \gamma' - z' \operatorname{cof.} \alpha')$$
$$+ P''\,(x'' \operatorname{cof.} \gamma'' - z'' \operatorname{cof.} \alpha'') + \&c = 0.$$

Et pareillement on aura par rapport à l'axe des x, ſi le ſyſtême eſt libre de tourner autour de cet axe, l'équation

$$P\,(y \operatorname{cof.} \gamma - z \operatorname{cof.} \beta) + P'\,(y' \operatorname{cof.} \gamma' - z' \operatorname{cof.} \beta')$$
$$+ P''\,(y'' \operatorname{cof.} \gamma'' - z'' \operatorname{cof.} \beta'') + \&c = 0.$$

De ſorte que lorſque le ſyſtême aura la liberté de ſe mouvoir autour de chacun de ces trois axes, il faudra pour l'équilibre, que ces trois équations aient lieu à la fois.

Si dans la quantité $x \operatorname{cof.} \beta - y \operatorname{cof.} \alpha$, qui multiplie la force P dans la premiere équation, on met pour $\operatorname{cof} \alpha$, $\operatorname{cof.} \beta$ les valeurs $\operatorname{fin.} \gamma \operatorname{cof.} \epsilon$, $\operatorname{fin.} \gamma \operatorname{fin.} \epsilon$ (art. 7, Sect. 2), on a $\operatorname{fin.} \gamma\,(x \operatorname{fin.} \epsilon - y \operatorname{cof.} \epsilon)$; & cette quantité deviendra $\rho \operatorname{fin.} \gamma \operatorname{fin.} (\epsilon - \varphi)$, en ſubſtituant pour x & y leurs valeurs $\rho \operatorname{cof.} \varphi$, $\rho \operatorname{fin.} \varphi$.

Or ϵ eſt l'angle que la projection de la direction de la force P ſur le plan des x & y fait avec l'axe des x, & φ eſt l'angle que le rayon vecteur ρ fait avec le même axe. Donc $\epsilon - \varphi$ ſera l'angle que la projection dont il s'agit fait avec ce rayon; par conſéquent $\rho \operatorname{fin.} (\epsilon - \varphi)$ ſera la perpendiculaire menée du centre des rayons ρ à la direction de la force P projettée ſur le plan des x, y; c'eſt-à-dire en général la perpendiculaire menée de l'axe des z (lequel eſt lui-même perpendiculaire au rayon ρ), à la direction de cette force. Ainſi nommant ϖ cette perpendiculaire, on aura $x \operatorname{cof.} \beta - y \operatorname{cof.} \alpha = \varpi \operatorname{fin.} \gamma$; & on pourra auſſi réduire à une forme ſemblable les quantités analogues, qui multiplient les forces P, P', P'', &c, dans les trois équations précédentes.

7. Quand le ſyſtême a la liberté de tourner ou pirouetter

en tout ſens autour d'un point, on pourroit douter s'il ſuffit de conſidérer ſéparément les rotations autour de trois axes perpendiculaires paſſant par ce point, & ſi ces trois rotations étant empêchées, toute autre rotation autour du même point le ſera auſſi.

Pour éclaircir ce doute, je conſidere qu'en ſuppoſant, comme plus haut, $x = \rho \operatorname{coſ.} \varphi$, $y = \rho \operatorname{ſin.} \varphi$, $x' = \rho' \operatorname{coſ.} \varphi'$, $y' = \rho' \operatorname{ſin.} \varphi'$ &c; & faiſant varier ſimplement les angles φ, φ', &c, de la même différence $d\varphi$, on aura,

$$dx = -y\,d\varphi,\ dy = x\,d\varphi,\ dx' = -y'd\varphi,\ dy' = x'd\varphi, \text{\&c.}$$

Ce ſont les variations de x, y, x', y', &c, dues à la rotation élémentaire $d\varphi$ du ſyſtême autour de l'axe des z.

On aura de même les variations de y, z, y', z', &c. dues à une rotation élémentaire $d\psi$ autour de l'axe des x, en changeant ſimplement dans les formules précédentes, x, y, x', y', &c, en y, z, y', z', &c: & $d\varphi$ en $d\psi$; ce qui donnera,

$$dy = -z\,d\psi,\ dz = y\,d\psi,\ dy' = -z'd\psi,\ dz' = y'd\psi, \text{\&c.}$$

Enfin en changeant dans ces dernieres formules y, z, y', z', &c, reſpectivement en z, x, z', x', &c, & $d\psi$ en $d\omega$, on aura les variations provenantes de la rotation élémentaire $d\omega$ autour de l'axe des y, leſquelles ſeront

$$dz = -x\,d\omega,\ dx = z\,d\omega,\ dz' = -x'd\omega,\ dx' = z'd\omega, \text{\&c.}$$

Si donc on ſuppoſe que les trois rotations élémentaires $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$ aient lieu à la fois, les variations totales des coordonnées x, y, z, x', y', z' &c, ſeront, d'après les principes du calcul différentiel, égales aux ſommes des variations par-

tielles dues à chacune de ces rotations ; de ſorte qu'on aura alors

$$dx = z\,d\omega - y\,d\varphi,\ dy = x\,d\varphi - z\,d\psi,\ dz = y\,d\psi - x\,d\omega,$$
$$dx' = z'\,d\omega - y'\,d\varphi,\ dy' = x'\,d\varphi - z'\,d\psi,\ dz = y'\,d\psi - x'\,d\omega,$$

&c.

8. Je remarque maintenant que ſi les coordonnées x, y, z d'un point quelconque du ſyſtême étoient reſpectivement proportionnelles à $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, les variations dx, dy, dz ſeroient nulles, comme on le voit par les formules qu'on vient de trouver. Donc tous les points qui répondroient à ces coordonnées, ſeroient immobiles pendant l'inſtant que le ſyſtême décriroit les trois angles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, en tournant autour des axes des x, y, z.

Or il eſt viſible que tous ces points ſont dans une ligne droite qui paſſe par l'origine des coordonnées ; & il n'eſt pas difficile de concevoir que cette droite fera reſpectivement avec les axes des x, y, z des angles dont les coſinus ſeront

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}},\ \frac{d\omega}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}},\ \frac{d\varphi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}};$$

ainſi cette droite ſera immobile pendant le même inſtant, & le mouvement du ſyſtême ne pourra être qu'un ſimple mouvement de rotation autour de cette même droite, qu'on nommera à cauſe de cela, *l'axe inſtantané de rotation.*

Pour avoir l'angle décrit en vertu de cette rotation, on conſidérera que $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ eſt en général l'élément de l'eſpace décrit par un point quelconque qui répond aux coordonnées x, y, z.

Or en ſubſtituant les valeurs de dx, dy, dz trouvées plus haut, on a $dx^2 + dy^2 + dz^2 = (z\,d\omega - y\,d\varphi)^2 + (x\,d\varphi - z\,d\psi)^2$

+

$+ (y d\psi - x d\omega)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2) - (x d\psi + y d\omega + z d\varphi)^2$.

D'un autre côté il eſt facile de prouver par la Géométrie, que $x d\psi + y d\omega + z d\varphi = 0$, eſt l'équation d'un plan paſſant par l'origine des coordonnées, & perpendiculaire à la droite, pour laquelle les coordonnées ſeroient proportionnelles aux quantités données $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, c'eſt-à-dire, l'axe inſtantané de rotation, en déſignant toujours les coordonnées par x, y, z. Donc l'eſpace élémentaire décrit par un point quelconque de ce même plan, ſera exprimé ſimplement par $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \times \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}$; & comme $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ eſt la diſtance de ce point à l'origine des coordonnées, où le plan & l'axe inſtantané de rotation, ſe coupent à angles droits, il s'enſuit que $\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}$ ſera l'angle élémentaire de rotation autour de cet axe, en vertu des rotations partielles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ autour des axes des coordonnées x, y, z.

9. On doit conclure de-là en général, que des rotations quelconques $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ autour de trois axes qui ſe coupent perpendiculairement dans un point, ſe compoſent en une ſeule, $d\theta = \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}$, autour d'un axe paſſant par le même point d'interſection, & faiſant avec ceux-là des angles λ, μ, ν, tels que coſ. $\lambda = \frac{d\psi}{d\theta}$, coſ. $\mu = \frac{d\omega}{d\theta}$, coſ $\nu = \frac{d\varphi}{d\theta}$, & réciproquement qu'une rotation quelconque $d\theta$ autour d'un axe donné, peut ſe décompoſer en trois rotations partielles exprimées par $d\theta$ coſ λ, $d\theta$ coſ. μ, $d\theta$ coſ. ν, autour de trois axes qui ſe coupent perpendiculairement dans un point de l'axe donné, & qui faſſent avec lui les angles λ, μ, ν;

ce qui fournit, comme l'on voit, un moyen bien ſimple de compoſer & de décompoſer les mouvemens de rotation.

10. Donc quelque rotation que le ſyſtême puiſſe avoir autour du point qui eſt l'origine des coordonnées, on pourra toujours la réduire à trois $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ autour des trois axes des coordonnées x, y, z; & les variations de toutes les coordonnées x, y, z, x', y', z', &c, des différens corps du ſyſtême, provenantes uniquement de ces rotations, ſeront exprimées généralement par les formules trouvées dans l'article 7.

Subſtituant donc ſimplement ces valeurs de dx, dy, dz, dx', dy', &c, dans la formule générale de l'équilibre (art. 2), on aura les termes dûs aux rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ du ſyſtême, & comme ces rotations ſont tout-à-fait arbitraires lorſque le ſyſtême a la liberté de tourner en tout ſens, il faudra dans ce cas que chacun des membres affectés de $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ ſoit nul en particulier; ce qui donnera les mêmes trois équations déja trouvées dans l'article 6, leſquelles ſeront donc ſuffiſantes pour empêcher toute rotation du ſyſtême autour du point qui eſt l'origine des coordonnées.

11. Si toutes les forces P, P', P'', &c, étoient paralleles entr'elles, on auroit $\alpha = \alpha' = \alpha''$, &c; $\beta = \beta' = \beta''$, &c; $\gamma = \gamma' = \gamma''$, &c, & les trois équations dont nous venons de parler, deviendroient

$$(Px + P'x' + P''x'' + \&c)\operatorname{coſ}.\beta - (Py + P'y' + P''y'' + \&c)\operatorname{coſ}.\alpha = 0$$

$$(Px + P'x' + P''x'' + \&c)\operatorname{coſ}.\gamma - (Pz + P'z' + P''z'' + \&c)\operatorname{coſ}.\alpha = 0$$

$$(Py + P'y' + P''y'' + \&c)\operatorname{coſ}.\gamma - (Pz + P'z' + P''z'' + \&c)\operatorname{coſ}.\beta = 0,$$

dont la troiſieme eſt déja une ſuite des deux premieres. Mais comme on a $\operatorname{coſ}.\alpha^2 + \operatorname{coſ}.\beta^2 + \operatorname{coſ}.\gamma^2 = 1$ (Sect. 2, art. 7),

on pourra déterminer par ces équations, les angles α, β, γ, & faisant pour abréger

$$P x + P' x' + P'' x'' + \&c = L$$
$$P y + P' y' + P'' y'' + \&c = M$$
$$P z + P' z' + P'' z'' + \&c = N,$$

on trouvera cos. $\alpha = \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$, cos. $\beta = \frac{M}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$, cos. $\gamma = \frac{N}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$.

Donc la position des corps étant donnée par rapport à trois axes, il faudra pour que tout mouvement de rotation du systême soit détruit, que le systême soit placé relativement à la direction des forces, de maniere que cette direction fasse avec les mêmes axes les angles α, β, γ qu'on vient de déterminer.

12. Si les quantités L, M, N étoient nulles, les angles α, β, γ demeureroient indéterminés, & la position du systême, relativement à la direction des forces, pourroit être quelconque; d'où résulte ce théorême, *que si la somme des produits des forces paralleles, par leurs distances à trois plans perpendiculaires entr'eux, est nulle par rapport à chacun de ces trois plans, l'effet des forces pour faire tourner le systême autour du point commun d'intersection des mêmes plans, se trouvera détruit.*

On sait que la gravité agit verticalement & proportionnellement à la masse; ainsi dans un systême de corps pesants, si on cherche un point tel que la somme de chaque masse par sa distance à un plan passant par ce point, soit nulle relativement à trois plans perpendiculaires, ce point aura la propriété que la gravité ne pourra imprimer au systême aucun mouvement de rotation autour du même point. C'est ce point

qu'on appelle *centre de gravité*, & qui eſt d'un uſage ſi étendu dans toute la Méchanique.

Pour le déterminer, il n'y a qu'à chercher ſa diſtance à trois plans perpendiculaires donnés. Or, puiſque la ſomme des produits des maſſes par leurs diſtances à un plan paſſant par le centre de gravité eſt nulle, la ſomme des produits des mêmes maſſes par leurs diſtances à un autre plan parallele à celui-ci, ſera néceſſairement égale au produit de toutes les maſſes par la diſtance du centre de gravité au même plan; de ſorte qu'on aura cette diſtance en diviſant la ſomme des produits des maſſes, & de leurs diſtances par la ſomme même des maſſes. Et de-là réſultent les formules connues pour les centres de gravité des lignes, des ſurfaces & des ſolides.

13. Nous allons conſidérer maintenant les *maxima & minima* qui peuvent avoir lieu dans l'équilibre; & pour cela nous reprendrons la formule générale.

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c, = 0,$$

de l'équilibre entre les forces P, Q, R, &c, dirigées ſuivant les lignes p, q, r, &c. (Sect. 2, art. 2).

On peut ſuppoſer que ces forces ſoient exprimées de maniere que la quantité $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c$, ſoit une différentielle exacte d'une fonction de p, q, r, &c, laquelle ſoit repréſentée par Φ, enſorte que l'on ait

$$d\Phi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

Alors on aura pour l'équilibre cette équation $d\Phi = 0$, laquelle fait voir que le ſyſtême doit être diſpoſé de maniere que la fonction Φ y ſoit généralement parlant un *maximum* ou un *minimum*.

Je dis *généralement parlant*; car on ſait que l'égalité d'une

différentielle à zéro, n'indique pas toujours un *maximum* ou un *minimum*, comme on le voit par la théorie des courbes.

La ſuppoſition précédente a lieu en général lorſque les forces P, Q, R, &c, tendent réellement ou à des points fixes ou à des corps du même ſyſtême, & ſont proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances (Sect. 2, art. 4); ce qui eſt proprement le cas de la nature.

Ainſi dans cette hypothèſe de forces le ſyſtême ſera en équilibre lorſque la fonction Φ ſera un *maximum* ou un *minimum*; c'eſt en quoi conſiſte le principe que M. de Maupertuis avoit propoſé ſous le nom de *loi de repos*.

14. Si on conſidere un ſyſtême de corps peſants en équilibre, les forces P, Q, R, &c, provenantes de la gravité, ſeront, comme l'on ſait, proportionnelles aux maſſes des corps, & par conſéquent conſtantes, & les diſtances p, q, r, &c, concourront au centre de la terre. On aura donc dans ce cas $\Phi = Pp + Qq + Rr +$ &c; par conſéquent, puiſque les lignes p, q, r, &c, ſont cenſées paralleles, la quantité $\frac{\Phi}{P + Q + R + \&c.}$, exprimera la diſtance du centre de gravité de tout le ſyſtême au centre de la terre; laquelle ſera donc un *minimum* ou un *maximum*, lorſque le ſyſtême ſera en équilibre; elle ſera, par exemple, un *minimum* dans le cas de la chaînette, & un *maximum* dans le cas de pluſieurs globules qui ſe ſoutiendroient en forme de voûte. Ce principe eſt connu depuis long-tems.

15. Si dans l'hypothèſe de l'article 13, on conſidere le ſyſtême en mouvement, & que u', u'', u''', &c, ſoient les viteſſes, & m', m'', m''', &c, les maſſes reſpectives des différens corps qui compoſent le ſyſtême; le Principe ſi connu de

la conservation des forces vives, dont nous donnerons une démonstration directe & générale dans la seconde Partie, fournira cette équation,

$$m' u'^2 + m'' u''^2 + m''' u'''^2 + \&c = \text{const.} - 2\,\Phi.$$

Donc, puisque dans l'état d'équilibre la quantité Φ est un *minimum* ou un *maximum*, il s'ensuit que la quantité $m' u'^2 + m'' u''^2 + m''' u'''^2 + \&c$, qui exprime la force vive de tout le systême, sera en même tems un *maximum* ou un *minimum*; c'est en quoi consiste le principe de Statique proposé par M. de Courtivron, *que de toutes les situations que prend successivement le systême, celle où il a la plus grande ou la plus petite force vive, est la même que celle où il le faudroit placer en premier lieu pour qu'il restât en équilibre.*

16. On vient de voir que la fonction Φ est un *minimum* ou un *maximum*, lorsque la position du systême est celle de l'équilibre; nous allons maintenant démontrer que si cette fonction est un *minimum*, l'équilibre aura de la stabilité; ensorte que le systême étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre, & venant ensuite à être tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre, en faisant des oscillations infiniment petites; qu'au contraire, dans le cas où la même fonction sera un *maximum*, l'équilibre n'aura pas de stabilité, & qu'étant une fois troublé, le systême pourra faire des oscillations qui ne seront pas très-petites, & qui pourront l'écarter de plus en plus de son premier état.

17. Pour démontrer cette proposition d'une maniere générale, je considere que, quelle que puisse être la forme du systême, sa position, c'est-à-dire celle des différens corps qui le composent, sera toujours déterminée par un certain

nombre de variables, & que la quantité Φ ſera une fonction donnée de ces mêmes variables. Or ſuppoſons que dans la ſituation d'équilibre les variables dont il s'agit ſoient égales à a, b, c, &c, & que dans une ſituation très-proche de celle-ci, elles ſoient $a+x$, $b+y$, $c+z$, &c, les quantités x, y, z, &c, étant très-petites; ſubſtituant ces dernieres valeurs dans la fonction Φ, & réduiſant en ſérie, ſuivant les dimenſions des quantités très-petites x, y, z, &c, la fonction Φ deviendra de cette forme,

$$\Phi = A + Bx + Cy + Dz + \&c.$$
$$+ Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \&c,$$

les quantités, A, B, C, &c, étant données en a, b, c, &c. Mais dans l'état d'équilibre la valeur de $d\Phi$ doit être nulle, de quelque maniere qu'on faſſe varier la poſition du ſyſtême; donc il faudra que la différentielle de Φ ſoit nulle en général, lorſque x, y, z, &c, ſont $= 0$; donc $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, &c.

On aura donc pour une ſituation quelconque très-proche de celle de l'équilibre, cette expreſſion de Φ.

$$\Phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \&c.$$

dans laquelle tant que les variables x, y, z, &c, ſont très-petites, il ſuffira de tenir compte des ſecondes dimenſions de ces variables.

18. Maintenant il eſt clair que pour que la quantité Φ ſoit toujours un *minimum*, lorſque x, y, z, &c, ſont nulles, il faut que la fonction

$$Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \&c,$$

que je nommerai X, soit constamment positive, quelles que soient les valeurs des variables x, y, z, &c.

Supposons d'abord y, z, &c, nuls, on aura $X = Fx^2$, quantité qui sera toujours positive, si F est positif; ainsi on aura, pour premiere condition du *minimum*, $F > 0$.

Or puisque la quantité X est toujours positive, lorsque y, z, &c sont nuls, il est clair que pour qu'elle demeure constamment positive, en donnant à ces variables des valeurs quelconques, il faut qu'elle ne puisse jamais devenir nulle. Donc si on fait l'équation $X = 0$, & qu'on en tire la valeur de x, il faudra que cette valeur soit imaginaire; mais l'équation $X = 0$, donne

$$x + \frac{Gy + Kz + \&c}{2F} = \sqrt{-\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + \&c}{F} + \left(\frac{Gy + Kz + \&c}{2F}\right)^2},$$

donc il faudra que la quantité

$$\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + \&c.}{F} - \left(\frac{Gy + Kz + \&c}{2F}\right)^2$$

que j'appellerai Y soit toujours positive. Or cette quantité se réduit à la forme

$$Py^2 + Qyz + Rz^2 + \&c,$$

en faisant pour abréger

$$P = \frac{H}{F} - \frac{G^2}{4F^2},\ Q = \frac{L}{F} - \frac{GK}{2F^2},\ R = \frac{M}{F} - \frac{K^2}{4F^2},\ \&c.$$

Donc par un raisonnement semblable au précédent, on aura premiérement la condition $P > 0$; & il faudra ensuite que la valeur de y tirée de l'équation $Y = 0$ soit imaginaire; or cette équation donne

$$y + \frac{Qz + \&c}{2P} = \sqrt{-\frac{Rz^2 + \&c}{P} + \left(\frac{Qz + \&c}{2P}\right)^2}$$

donc

donc la quantité

$$\frac{R z^2 + \&c.}{P} - \left(\frac{Q z + \&c.}{2P}\right)^2,$$

que je nommerai Z, & qui se réduit à la forme $T z^2 + \&c$, en faisant pour abréger

$$T = \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}, \&c.$$

devra être toujours positive. Donc il faudra de nouveau que l'on ait $T > 0$; & ainsi de suite.

Si la fonction X ne contient que trois variables x, y, z, il est visible que les trois conditions $F > 0$, $P > 0$, $T > 0$, suffiront pour la rendre toujours positive; & par conséquent pour le *minimum* de la quantité Φ; s'il y avoit une quatrieme variable, on trouveroit une condition de plus; & en général le nombre des conditions sera toujours égal à celui des variables.

Si au contraire la quantité Φ devoit être toujours un *maximum* lorsque x, y, z, &c sont nuls, il faudroit que la fonction X fût constamment négative. Par conséquent il faudroit d'abord que F fût une quantité négative, & ensuite que l'équation $X = 0$ ne donnât aucune racine réelle pour x; ce qui fournira les mêmes conditions qu'on a trouvées dans le cas précédent, savoir $P > 0$, $T > 0$, &c.

D'où il s'ensuit que les conditions du *maximum* sont les mêmes que celles du *minimum*, à l'exception de la premiere qui, pour le *minimum* est $F > 0$, & pour le *maximum* $F < 0$.

19. Je remarque maintenant que les quantités X, Y, Z, &c, peuvent se mettre sous la forme

$$X = F\left(\left(x + \frac{Gy + Kz + \&c}{2F}\right)^2 + Y\right)$$

$$Y = P\left(\left(y + \frac{Qz + \&c}{2P}\right)^2 + Z\right)$$

$$Z = T(z + \&c)^2 + \&c),$$

&c.

Donc ſubſtituant ſucceſſivement, on aura

$$X = F\left(x + \frac{Gy + Kz + \&c}{2F}\right)^2$$

$$+ FP\left(y + \frac{Qz + \&c}{2P}\right)^2$$

$$+ FPT(z + \&c)^2,$$

&c.

d'où l'on voit clairement que la valeur de X ſera toujours poſitive, ſi F, P, T, &c > 0, & qu'au contraire elle ſera toujours négative, ſi $F < 0$ & P, T, &c > 0.

De-là il ſuit qu'en prenant, pour plus de ſimplicité, à la place des variables x, y, z, &c, d'autres variables ξ, η, ζ, &c, telles que $\xi = x + \frac{Gy + Kz + \&c}{2F}$, $\eta = y + \frac{Qz + \&c}{2P}$, &c, on pourra toujours donner à la fonction X cette forme très-ſimple,

$$X = f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \&c,$$

enſorte que la quantité Φ ſera

$$\Phi = A + f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \&c.$$

& que les coëfficiens f, g, h, &c, ſeront néceſſairement tous poſitifs, dans le cas du *minimum* de Φ, & négatifs dans celui du *maximum*.

20. Cela poſé, pour démontrer le théorême de l'article

16, il ne faudra que ſubſtituer l'expreſſion précédente de Φ dans l'équation de la *conſervation des forces vives* (art. 15), ce qui donnera celle-ci,

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \&c. = \text{conſt.} - 2A - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2, \&c.$$

Or dans l'état d'équilibre on a (hyp.) $x = 0, y = 0, z = 0$, &c; donc auſſi $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, &c (art. 19); donc, ſi on ſuppoſe qu'on dérange le ſyſtême de cet état, en imprimant aux corps M', M'', M''', &c, les viteſſes très-petites V', V'', V''', &c, il faudra que l'on ait $u' = V'$, $u'' = V''$, $u''' = V'''$, &c, lorſque $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, &c. On aura donc $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \&c. = \text{conſt.} - 2A$; ce qui ſervira à déterminer la conſtante arbitraire.

Ainſi l'équation précédente deviendra

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \&c = M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \&c. - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2, \&c,$$

d'où il eſt aiſé de tirer ces deux concluſions.

1°. Que dans le cas du *minimum* de Φ, dans lequel les coëfficiens f, g, h, &c, ſont tous poſitifs, la quantité toujours poſitive, $2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \&c$, devra néceſſairement être moindre, ou du moins ne pourra pas être plus grande que la quantité donnée $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \&c$, qui eſt elle-même très-petite; par conſéquent ſi on nomme cette quantité T, on aura pour chacune des variables ξ, η, ζ, &c, ces limites $\pm\sqrt{\frac{T}{2f}}$, $\pm\sqrt{\frac{T}{2g}}$, $\pm\sqrt{\frac{T}{2h}}$, &c, entre leſquelles elles ſeront néceſſairement renfermées; d'où il ſuit que dans ce cas le ſyſtême ne pourra que s'écarter très-peu de ſon état d'équilibre, & ne pourra faire que des oſcillations très-petites, & d'une étendue déterminée.

2°. Que dans le cas du *maximum* de Φ dans lequel les coëfficiens f, g, h, &c, ſont tous négatifs, la quantité toujours poſitive $-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2$, &c, pourra croître à l'infini, & qu'ainſi le ſyſtême pourra s'écarter de plus en plus de ſon état d'équilibre. Du moins l'équation ci-deſſus fait voir que dans ce cas rien n'empêche que les variables ξ, η, ζ, &c, n'aillent toujours en augmentant ; mais il ne s'enſuit pas encore qu'elles doivent aller en effet en augmentant ; nous démontrerons cette derniere Propoſition dans la Section cinquieme de la Dynamique.

QUATRIEME SECTION.

Méthode très-ſimple de trouver les équations néceſſaires pour l'équilibre d'un ſyſtême quelconque de corps regardés comme des points, ou comme des maſſes finies, & tirés par des puiſſances données.

1. CEUX qui juſqu'à préſent ont écrit ſur le Principe des viteſſes virtuelles, ſe ſont plutôt attachés à démontrer la vérité de ce principe par la conformité de ſes réſultats avec ceux des principes ordinaires de la Statique, qu'à montrer l'uſage qu'on en peut faire pour réſoudre directement les problêmes de cette Science. Nous nous ſommes propoſé de remplir ce dernier objet avec toute la généralité dont il eſt ſuſceptible, & de déduire du Principe dont il s'agit, des formules analitiques qui renferment la ſolution de tous les problêmes ſur l'équilibre des corps, à-peu-près de la même ma-

niere que les formules des ſoutangentes, des rayons oſculateurs, &c, renferment la détermination de ces lignes dans toutes les courbes.

2. La méthode expoſée dans la premiere Section, peut être employée dans tous les cas, & ne demande, comme on l'a vu, que des opérations purement analitiques; mais comme l'élimination immédiate de ces variables ou de leurs différences, par le moyen des équations de condition, peut être ſouvent embarraſſante, & conduire à des calculs trop compliqués, nous allons préſenter la même méthode ſous une forme plus ſimple, en réduiſant en quelque maniere tous les cas à celui d'un ſyſtême entiérement libre.

3. Soient $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, &c. les différentes équations de condition données par la nature du ſyſtême, les quantités L, M, N, &c, étant des fonctions finies des variables x, y, z, x', y', z', &c; en différentiant ces équations on aura celles-ci, $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, &c, leſquelles donneront la relation qu'il doit y avoir entre les différentielles des mêmes variables. En général nous repréſenterons par $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, &c, les équations de condition entre ces différentielles, ſoit que ces équations ſoient elles-mêmes des différences exactes ou non, pourvu que les différentielles n'y ſoient que linéaires.

Maintenant comme ces équations ne doivent ſervir qu'à éliminer un pareil nombre de différentielles dans l'équation des viteſſes virtuelles, après quoi les coëfficiens des différentielles reſtantes, doivent être égalés chacun à zéro, il n'eſt pas difficile de prouver par la théorie de l'élimination des équations linéaires, qu'on aura les mêmes réſultats ſi on ajoute ſimplement à l'équation des viteſſes virtuelles, les

différentes équations de condition $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, &c, multipliées chacune par un coëfficient indéterminé, qu'enſuite on égale à zéro la ſomme de tous les termes qui ſe trouvent multipliés par une même différentielle; ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'il y a de différentielles; qu'enfin on élimine de ces dernieres équations les coëfficiens indéterminés par leſquels on a multiplié les équations de condition.

4. De-là réſulte donc cette regle extrêmement ſimple pour trouver les conditions de l'équilibre d'un ſyſtême quelconque propoſé.

On prendra la ſomme des *momens* de toutes les puiſſances qui doivent être en équilibre (Sect. 1, art. 5), & on y ajoutera les différentes fonctions différentielles qui doivent être nulles par les conditions du problême, après avoir multiplié chacune de ces fonctions par un coëfficient indéterminé; on égalera le tout à zéro, & l'on aura ainſi une équation différentielle qu'on traitera comme une équation ordinaire *de maximis & minimis*, & d'où l'on tirera autant d'équations particulieres finies qu'il y aura de variables; ces équations étant enſuite débarraſſées, par l'élimination, des coëfficiens indéterminés donneront toutes les conditions néceſſaires pour l'équilibre.

5. L'équation différentielle dont il s'agit, ſera donc de cette forme,

$$Pdp + Qdq + Rdr + \&c + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \&c = 0,$$

dans laquelle λ, μ, ν, &c, ſont des quantités indéterminées; nous la nommerons dans la ſuite, *équation générale de l'équilibre.*

Cette équation donnera relativement à chaque coordonnée, telle que x, de chacun des corps du ſyſtême, une équation de la forme ſuivante,

$$P\,\frac{dp}{dx}+Q\,\frac{dq}{dx}+R\,\frac{dr}{dx}+\&c+\lambda\,\frac{dL}{dx}+\mu\,\frac{dM}{dx}+\nu\,\frac{dN}{dx}+\&c=0;$$

enſorte que le nombre de ces équations ſera égal à celui de toutes les coordonnées des corps. Nous les appellerons *équations particulieres de l'équilibre.*

6. Toute la difficulté conſiſtera donc à éliminer de ces dernieres équations, les indéterminées λ, μ, ν, &c; or c'eſt ce qu'on pourra toujours exécuter par les moyens connus; mais il conviendra dans chaque cas de choiſir ceux qui pourront conduire aux réſultats les plus ſimples. Les équations finales renfermeront toutes les conditions néceſſaires pour l'équilibre propoſé; & comme le nombre de ces équations ſera égal à celui de toutes les coordonnées des corps du ſyſtême moins celui des indéterminées λ, μ, ν, &c, qu'il a fallu éliminer, que d'ailleurs ces mêmes indéterminées ſont en même nombre que les équations de condition finies $L=0, M=0, N=0$, &c, il s'enſuit que les équations dont il s'agit, jointes à ces dernieres, ſeront toujours en même nombre que les coordonnées de tous les corps; par conſéquent elles ſuffiront pour déterminer ces coordonnées, & faire connoître la poſition que chaque corps doit prendre pour être en équilibre.

7. Je remarque maintenant que les termes $\lambda\, dL$, $\mu\, dM$, &c, de l'équation générale de l'équilibre, peuvent être auſſi regardés comme repréſentants les momens de différentes forces appliquées au même ſyſtême.

En effet, puiſque dL eſt une fonction différentielle des variables x', y', z', x'', y'', &c, qui ſervent de coordonnées

aux différens corps du ſyſtême, cette fonction ſera composée de différentes parties que je déſignerai par dL', dL'', &c, enſorte que $dL = dL' + dL'' +$ &c; dL' ne renfermant que les termes affectés de dx', dy', dz', dL'' ne renfermant que ceux qui contiennent dx'', dy'', dz'', & ainſi de ſuite.

De cette maniere le terme λdL, de l'équation générale ſera composé des termes $\lambda dL', \lambda dL''$, &c. Or ſi on donne au terme $\lambda dL'$ la forme ſuivante,

$$\lambda \sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)} \times \frac{dL'}{\sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)}}.$$

Il eſt clair par ce qu'on a dit dans l'article 8 de la ſeconde Section, que cette quantité peut repréſenter le moment d'une force $= \lambda \sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)}$, appliquée au corps dont les coordonnées ſont x', y', z', & dirigée perpendiculairement à la ſurface qui aura pour équation $dL' = 0$, en n'y regardant que x', y', z', comme variables. De même le terme $\lambda dL''$, pourra repréſenter le moment d'une force $= \sqrt{\left(\left(\frac{dL''}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz''}\right)^2\right)}$, appliquée au corps qui a pour coordonnées x'', y'', z'', & dirigée perpendiculairement à la ſurface courbe, dont l'équation ſera $dL'' = 0$, en n'y regardant que x'', y'', z'', comme variables, & ainſi de ſuite.

Donc en général le terme λdL ſera équivalent à l'effet de différentes forces exprimées par $\lambda \sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right)}$, $\lambda \sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right)}$, &c, & appliquées reſpectivement aux corps qui répondent aux

coordonnées

coordonnées x', y', z', x'', y'', z'', &c, ſuivant des directions perpendiculaires aux différentes ſurfaces courbes repréſentées par l'équation $dL = 0$, en y faiſant varier premierement x', y', z', enſuite x'', y'', z'', & ainſi du reſte.

8. Il réſulte de-là que chaque équation de condition eſt équivalente à une ou pluſieurs forces appliquées au ſyſtême ſuivant des directions données; enſorte que l'état d'équilibre du ſyſtême ſera le même, ſoit qu'on emploie la conſidération de ces forces, ou qu'on ait égard aux équations de condition.

Réciproquement ces forces peuvent tenir lieu des équations de condition réſultantes de la nature du ſyſtême donné; de maniere qu'en employant ces forces, on pourra regarder les corps comme entiérement libres & ſans aucune liaiſon. Et de-là on voit la raiſon métaphyſique, pourquoi l'introduction des termes $\lambda dL + \mu dM +$ &c, dans l'équation générale de l'équilibre, fait qu'on peut enſuite traiter cette équation comme ſi tous les corps du ſyſtême étoient entiérement libres; c'eſt en quoi conſiſte l'eſprit de la méthode de cette Section.

A proprement parler, les forces en queſtion tiennent lieu des réſiſtances que les corps devroient éprouver en vertu de leur liaiſon mutuelle, ou de la part des obſtacles qui, par la nature du ſyſtême, pourroient s'oppoſer à leur mouvement, ou plutôt ces forces ne ſont que les forces mêmes de ces réſiſtances, leſquelles doivent être égales & directement oppoſées aux preſſions exercées par les corps. Notre méthode donne, comme l'on voit, le moyen de déterminer ces forces & ces réſiſtances; ce qui n'eſt pas un des moindres avantages de cette méthode.

9. Jusqu'ici nous avons considéré les corps comme des points; & nous avons vu comment on détermine les loix de l'équilibre de ces points, en quelque nombre qu'ils soient, & quelques forces qui agissent sur eux. Or un corps d'un volume & d'une figure quelconque, n'étant que l'assemblage d'une infinité de parties ou points matériels, il s'ensuit qu'on peut déterminer aussi les loix de l'équilibre des corps de figure quelconque, par l'application des principes précédens.

En effet, la maniere ordinaire de résoudre les questions de Méchanique qui concernent les corps de masse finie, consiste à ne considérer d'abord qu'un certain nombre de points placés à des distances finies les uns des autres, & à chercher les loix de leur équilibre ou de leur mouvement; à étendre ensuite cette recherche à un nombre indéfini de points; enfin à supposer que le nombre des points devienne infini, & qu'en même tems leurs distances deviennent infiniment petites, & à faire aux formules trouvées pour un nombre fini de points, les réductions & les modifications que demande le passage du fini à l'infini.

Ce procédé est, comme l'on voit, analogue aux méthodes géométriques & analitiques qui ont précédé le calcul infinitésimal; & si ce calcul a l'avantage de faciliter & de simplifier d'une maniere surprenante, les solutions des questions qui ont rapport aux courbes, il ne le doit qu'à ce qu'il considere ces lignes en elles-mêmes, & comme courbes, sans avoir besoin de les regarder, premierement comme polygones, & ensuite comme courbes. Il y aura donc à peu-près le même avantage à traiter les problêmes de Méchanique dont il est question par des voies directes, & en considérant immédiatement les corps de masses finies comme des assem-

blages d'une infinité de points ou corpuſcules, animés chacun par des forces données. Or rien n'eſt plus facile que de modifier & ſimplifier par cette conſidération, la méthode générale que nous venons de donner.

10. Mais il eſt néceſſaire de remarquer, avant tout, que dans l'application de cette méthode aux corps d'une maſſe finie, dont tous les points ſont animés par des forces quelconques, il ſe préſente naturellement deux ſortes de différentielles qu'il faut bien diſtinguer. Les unes ſe rapportent aux différens points qui compoſent le corps; les autres ſont indépendantes de la poſition mutuelle de ces points, & repréſentent ſeulement les eſpaces infiniment petits que chaque point peut parcourir, en ſuppoſant que la ſituation du corps varie infiniment peu. Comme juſqu'ici nous n'avons eu que des différences de cette derniere eſpece à conſidérer, nous les avons déſignées par la caractériſtique ordinaire d; mais puiſque nous devons maintenant avoir égard aux deux eſpeces de différences à la fois, & qu'il eſt par conſéquent néceſſaire d'introduire une nouvelle caractériſtique, il nous paroît à propos d'employer l'ancienne caractériſtique d pour déſigner les différences de la premiere eſpece qui ſont analogues à celles que l'on conſidere communément en Géométrie, & de dénoter les différences de la ſeconde eſpece qui ſont particulieres à la matiere que nous traitons par la caractériſtique δ, que nous avons employée autrefois dans le *calcul des variations*, avec lequel celui dont il s'agit ici a une liaiſon intime & néceſſaire.

Nous nommerons même, par cette raiſon, *variations* les différences affectées de δ, & nous conſerverons le nom de *différentielles*, à celles qui ſeront affectées de d. Du reſte les

mêmes formules qui donnent les différentielles ordinaires, donneront auſſi les variations, en ſubſtituant δ à la place de d.

11. Je remarque enſuite qu'au lieu de conſidérer la maſſe donnée comme un aſſemblage d'une infinité de points contigus, il faudra, ſuivant l'eſprit du calcul infinitéſimal, la conſidérer plutôt comme compoſée d'élémens infiniment petits, qui ſoient du même ordre de dimenſion que la maſſe entiere; qu'ainſi pour avoir les forces qui animent chacun de ces élémens, il faudra multiplier par ces mêmes élémens, les forces P, Q, R, &c, qu'on ſuppoſe appliquées à chaque point de ces élémens, & qu'on regardera comme analogues à celles qui proviennent de l'action de la gravité.

12. Si donc on nomme m la maſſe totale, & dm un de ſes élémens quelconque, on aura Pdm, Qdm, Rdm, &c, pour les forces qui tirent l'élément dm, ſuivant les directions des lignes p, q, r, &c. Donc multipliant reſpectivement ces forces par les variations δp, δq, δr, &c, on aura leurs momens, dont la ſomme pour chaque élément dm, ſera repréſentée par la formule $(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\, dm$; & pour avoir la ſomme des momens de toutes les forces du ſyſtême, il n'y aura qu'à prendre l'intégrale de cette formule par rapport à toute la maſſe donnée.

Nous dénoterons ces intégrales totales, c'eſt-à-dire, relatives à l'étendue de toute la maſſe, par la caractériſtique majuſcule S, en conſervant la caractériſtique ordinaire $\int$ pour déſigner les intégrales partielles ou indéfinies.

13. On aura ainſi pour la ſomme des momens de toutes les forces du ſyſtême, la formule intégrale

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\, dm;$$

& cette quantité devra être nulle en général dans l'état d'équilibre du ſyſtême.

Or, comme par la nature du ſyſtême il y a néceſſairement des rapports donnés entre les différentes variations, δp, δq, δr, &c, relatives à chaque point de la maſſe, il faudra les réduire à un certain nombre de variations indépendantes & indéterminées; & les termes multipliés par ces dernieres variations, étant égalés à zéro, donneront les équations particulieres de l'équilibre. Mais comme ces réductions peuvent être embarraſſantes, il conviendra de les éviter, par le moyen de la méthode que nous venons de donner dans cette Section.

14. Pour appliquer cette méthode au cas dont il s'agit ici, nous ſuppoſerons que $L = 0$, $M = 0$, &c, ſoient les équations de condition qui doivent avoir lieu par la nature du problême, par rapport à chaque point de la maſſe; & nous les nommerons *équation de condition indéterminées.*

Ces équations étant différentiées ſuivant δ, on aura celles-ci, $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, &c. On multipliera les quantités δL, δM, &c, par des quantités indéterminées λ, μ, &c: on en prendra l'intégrale totale, qui ſera par conſéquent repréſentée par la formule $S(\lambda \delta L + \mu \delta M + \&c)$, & ajoutant cette intégrale à celle de l'article précédent, on aura l'équation générale de l'équilibre.

Au reſte, on obſervera qu'il n'eſt pas néceſſaire que δL, δM, &c, ſoient les variations exactes de fonctions de x, y, z, dx, dy, &c, mais qu'il ſuffit que $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, &c, ſoient les équations de condition indéterminées entre les variations de x, y, z, dx, dy, &c, (art. 3).

15. Mais pour embraſſer à la fois toute la généralité

poſſible, il faut remarquer qu'il peut ſe faire qu'outre les forces qui agiſſent en général ſur tous les points de la maſſe, il y en ait qui n'agiſſent que ſur des points déterminés de cette maſſe, leſquels points ſont ordinairement ceux qui répondent aux extrémités de la maſſe donnée, c'eſt-à-dire, au commencement & à la fin de l'intégrale déſignée par S.

De même il pourra y avoir des équations de condition particulieres à ces points, & que nous nommerons équations de condition *déterminées*, pour les diſtinguer de celles qui ont lieu en général dans toute l'étendue de la maſſe, & nous les repréſenterons par $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, &c, ou plutôt par $\delta A = 0$, $\delta B = 0$, $\delta C = 0$, &c.

Nous marquerons d'un trait, de deux, de trois, &c, toutes les quantités qui ſe rapportent à des points déterminés de la maſſe, & en particulier nous marquerons d'un ſeul trait celles qui ſe rapportent au commencement de l'intégrale déſignée par S, de deux traits celles qui ſe rapportent à la fin de cette intégrale, de trois ou davantage, celles qui ſe rapportent à des points intermédiaires quelconques.

Ainſi il faudra ajouter à l'intégrale $S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\,dm$, la quantité $P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \&c + P''\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + \&c$; & à l'intégrale $S(\lambda\delta L + \mu\delta M + \&c)$, la quantité $\alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + \&c$.

De ſorte que l'équation générale de l'équilibre ſera de cette forme,

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\,dm + S(\lambda\delta L + \mu\delta M + \&c) + P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \&c + P''\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + \&c + \alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + \&c = 0.$$

16. Cette équation, lorſqu'on y aura ſubſtitué les valeurs

de $\delta p, \delta q, \delta r$, &c; $\delta L, \delta M$, &c, en $\delta x, \delta y, \delta z, \delta dx, \delta dy$, &c; ainsi que celles de $\delta p', \delta p'$, &c; $\delta q', \delta q''$, &c, δA, δB, &c, en x', x'', &c, $\delta x', \delta x''$, &c, $\delta dx'$, &c, déduites des circonstances particulieres de chaque problême, aura toujours une forme analogue à celles que *le calcul des variations* fournit pour la détermination des *maxima* & *minima* des formules intégrales; ainsi il n'y aura qu'à y appliquer les régles connues de ce calcul.

On considérera donc que, comme les caractéristiques d & δ marquent deux especes de différences entièrement indépendantes entr'elles, quand ces caractéristiques se trouvent ensemble, il doit être indifférent dans quel ordre elles soient placées, parce qu'en supposant qu'une quantité varie de deux manieres différentes, on a toujours le même résultat, quel que soit l'ordre dans lequel se font ces variations. Ainsi δdx sera la même chose que $d\delta x$, & pareillement $d^2 \delta x$ sera la même chose que $d^2 \delta x$; & ainsi de suite. On pourra donc toujours changer à volonté l'ordre des caractéristiques, sans altérer la valeur des différences: & pour notre objet il sera à propos de transporter la caractéristique d avant la δ, afin que l'équation proposée ne contienne que les variations des coordonnées, & les différentielles de ces mêmes variations. C'est en quoi consiste le premier principe fondamental du *calcul des variations*.

17. Or les différentielles $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$, $d^2\delta x$, &c, qui se trouvent sous le signe S, peuvent être éliminées par l'opération connue des intégrations par parties. Car en général $\int \Omega\, d\delta x = \Omega\, \delta x - \int \delta x\, d\Omega$, $\int \Omega\, d^2 \delta x = \Omega\, d\delta x - d\Omega\, \delta x + \int \delta x\, d^2 \Omega$, & ainsi des autres, où il faut observer que les quantités hors du signe $\int$ se rapportent naturellement aux der-

niers points des intégrales, mais que pour rendre ces intégrales complettes, il faut néceſſairement en retrancher les valeurs des mêmes quantités hors du ſigne, leſquelles répondent aux premiers points des intégrales, afin que tout s'évanouiſſe dans ces points; ce qui eſt évident par la théorie des intégrations.

Ainſi en marquant par un trait les quantités qui ſe rapportent au commencement des intégrales totales déſignées par S, & par deux traits celles qui ſe rapportent à la fin de ces intégrales, on aura les réductions ſuivantes,

$$S\,\Omega\, d\delta x = \Omega''\delta x'' - \Omega'\delta x' - S\,\delta x\, d\Omega$$

$$S\,\Omega\, d^2\delta x = \Omega''\, d\delta x'' - d\Omega''\delta x'' - \Omega'\, d\delta x' + d\Omega'\,\delta x' + S\,\delta x\, d^2\Omega,$$

&c.

leſquelles ſerviront à faire diſparoître toutes les différentielles des variations qui pourront ſe trouver ſous le ſigne S. Ces réductions conſtituent le ſecond principe fondamental du *calcul des variations*.

18. De cette maniere donc l'équation générale de l'équilibre ſe réduira à la forme ſuivante,

$$S(\Pi\delta x + \Sigma\delta y + \Psi\delta z) + \Delta = 0,$$

dans laquelle Π, Σ, Ψ ſeront des fonctions de x, y, z, & de leurs différentielles, & Δ contiendra les termes affectés des variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, &c, & de leurs différentielles.

Donc pour que cette équation ait lieu, indépendamment des variations des différentes coordonnées, il faudra que l'on ait, 1°. Π, Σ, Ψ, nuls dans toute l'étendue de l'intégrale S, c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, dans chaque point de la maſſe, 2°. chaque terme de Δ auſſi égal à zéro.

Les équations indéfinies $\Pi = 0$, $\Sigma = 0$, $\Psi = 0$, donneront en général la relation qui doit ſe trouver entre les variables x, y, z; mais il faudra pour cela en éliminer les variables indéterminées λ, μ, &c, leſquelles ſont en même nombre que les équations de condition indéterminées $L = 0$, $M = 0$, &c. (art. 14).

Or je remarque que ces équations ne ſauroient être au-delà de trois; car puiſque ce ſont des équations indéfinies entre les trois variables x, y, z, & leurs différentielles, il eſt clair que s'il y en avoit plus de trois, on auroit plus d'équations que de variables; enſorte qu'il faudroit que la quatrieme fût une ſuite néceſſaire des trois premieres, & ainſi des autres. Donc il n'y aura jamais plus de trois indéterminées, λ, μ, ν à éliminer; enſorte qu'on pourra toujours trouver les valeurs de ces indéterminées en fonctions de x, y, z. Au reſte les équations qui diſparoîtront par ces éliminations, ſeront remplacées par les équations mêmes de condition, moyennant quoi on pourra toujours connoître les valeurs de x, y, z, qui doivent avoir lieu dans l'état d'équilibre de tout le ſyſtême.

A l'égard des autres équations réſultantes des différens termes de la quantité Δ, ce ne ſeront que des équations particulieres qui ne devront avoir lieu que par rapport à des points déterminés de la maſſe, & qui ſerviront principalement à déterminer les conſtantes arbitraires que les expreſſions de x, y, z, déduites des équations précédentes, pourront contenir. Pour faire uſage de ces équations, on y ſubſtituera donc les valeurs déja trouvées de λ, μ, &c, enſuite on en éliminera les indéterminées α, β, &c, & on y joindra

les équations de condition $A = o$, $B = o$, &c, qui serviront à remplacer celles que l'élimination dont il s'agit fera disparoître.

19. Enfin on fera ici par rapport aux coordonnées rectangles, la même remarque qu'on a déja faite à la fin de la seconde Section, en appliquant aux variations δx, δy, δz, ce que nous y avons dit relativement aux différences dx, dy, dz; mais pour ce qui regarde les différentielles dx, dy, dz, de la méthode de la Section présente, il ne sera pas permis d'employer à leur place d'autres différentielles, à moins qu'elles ne résultent de la différentiation des expressions finies de x, y, z.

CINQUIEME SECTION.

Solution de différens problêmes de Statique.

NOUS allons présentement montrer l'usage de nos méthodes dans différens problêmes sur l'équilibre des corps; on verra par l'uniformité & la rapidité des solutions, combien ces méthodes sont supérieures à celles que l'on avoit employées jusqu'ici dans la Statique.

PARAGRAPHE PREMIER.

De l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point; & de la composition & de la décomposition des forces.

1. Qu'il s'agisse de trouver les loix de l'équilibre d'autant de forces qu'on voudra, P, Q, R, &c, toutes appliquées à un même point, & dirigées à des points donnés.

Nommant p, q, r, &c, les diſtances rectilignes entre le point commun d'application de ces forces, & leurs points de tendance, on aura la formule

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

pour la ſomme des momens de toutes les forces, laquelle doit être nulle dans l'état d'équilibre.

2. Soient x, y, z les trois coordonnées rectangles du point auquel toutes les forces ſont appliquées; & ſoient de même a, b, c les coordonnées rectangles pour le point auquel tend la force P; f, g, h, celles du point auquel tend la force Q; l, m, n celles du point auquel tend la force R, & ainſi des autres; ces coordonnées étant toutes rapportées aux mêmes axes fixes dans l'eſpace. On aura évidemment

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$q = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2}$$

&c.

Et la quantité $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c$, ſe transformera en celle-ci,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

dans laquelle on aura

$$X = \frac{x-a}{p}P + \frac{x-f}{q}Q + \frac{x-l}{r}R + \&c$$

$$Y = \frac{y-b}{p}P + \frac{y-g}{q}Q + \frac{y-m}{r}R + \&c$$

$$Z = \frac{z-c}{p}P + \frac{z-h}{q}Q + \frac{z-n}{r}R + \&c.$$

Il n'eſt pas inutile de remarquer dans ces expreſſions que

les quantités $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ ſont égales aux coſinus des angles que la ligne p, c'eſt-à-dire la direction de la force P, fait avec les axes des x, y, z; que de même $\frac{x-f}{q}$, $\frac{y-g}{q}$, $\frac{z-h}{q}$ ſont les coſinus des angles que la direction de la force Q fait avec les mêmes axes; & ainſi de ſuite (Sect. 2, art. 7).

3. Cela poſé, ſuppoſons en premier lieu que le corps ou point auquel les forces P, Q, R, &c, ſont appliquées, ſoit entierement libre; il n'y aura alors aucune équation de condition entre les coordonnées x, y, z; & la quantité $Xdx + Ydy + Zdz$ devra être nulle, indépendamment des valeurs de dx, dy, dz (Sect. 2, art. 9); ce qui donnera ſur le champ ces trois équations particulieres,

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0.$$

Ce ſont les équations qui renferment les loix de l'équilibre de tant de forces qu'on voudra concourantes à un même point.

4. Si dans les expreſſions de X, Y, Z, on fait $P = p$, $Q = q$, $R = r$, &c, (ce qui eſt permis, puiſqu'il eſt indifférent à quels points pris dans les directions des forces, elles ſoient ſuppoſées tendre) on aura ces équations,

$$x - a + x - f + x - l + \&c = 0,$$
$$y - b + y - g + y - m + \&c = 0,$$
$$z - c + z - h + z - n + \&c = 0;$$

d'où l'on tire, en ſuppoſant que le nombre des forces P, Q, R, &c, ſoit μ,

$$x = \frac{a + f + l + \&c}{\mu}$$

$$y = \frac{b + g + m + \&c}{\mu}$$

$$z = \frac{c + h + n + \&c.}{\mu},$$

& ces expreſſions de x, y, z, font voir que le point auquel ſont appliquées les forces, eſt dans le centre de gravité des points auxquels ces forces tendent.

De-là réſulte le théorême de Leibnitz, que ſi tant de puiſſances qu'on voudra ſont en équilibre ſur un point, & qu'on tire de ce point des droites qui repréſentent tant la quantité que la direction de chaque puiſſance, le point dont il s'agit ſera le centre de gravité de tous les points auxquels ces lignes ſeront terminées.

Si donc il n'y a que quatre puiſſances, & qu'on imagine une pyramide dont les quatre angles ſoient aux extrémités des droites qui repréſentent les puiſſances; il y aura équilibre entre ces quatre puiſſances, lorſque le point ſur lequel elles agiſſent, ſera dans le centre de gravité de la pyramide; car on ſait par la Géométrie, que le centre de gravité de toute la pyramide, eſt le même que celui de quatre corps égaux qui ſeroient placés aux quatre coins de la pyramide. Ce dernier théorême eſt dû à Roberval.

5. Si on conſidere l'équation

$$P dq + Q dq + R dr + \&c - X dx - Y dy - Z dz = 0,$$

laquelle étant identique (art. 2), doit par conſéquent avoir lieu en général, quelles que ſoient les différences dx, dy, dz, il eſt clair qu'on pourra la regarder comme l'équation de l'équilibre entre les puiſſances P, Q, R, &c, dirigées ſuivant les

lignes p, q, r, &c, & les puiſſances X, Y, Z, dirigées ſuivant les lignes $-x$, $-y$, $-z$, toutes ces puiſſances étant appliquées à un même point. Donc les trois puiſſances X, Y, Z font équilibre aux puiſſances P, Q, R, &c; mais il eſt viſible que les puiſſances X, Y, Z, étant appliquées ſuivant les directions des lignes x, y, z, feroient auſſi équilibre aux mêmes puiſſances X, Y, Z, mais dirigées ſuivant $-x$, $-y$, $-z$; donc elles ſeront équivalentes aux puiſſances P, Q, R, &c. D'où il s'enſuit que les quantités X, Y, Z, ne ſont autre choſe que les valeurs des puiſſances P, Q, R, &c, réduites aux directions des trois coordonnées rectangles x, y, z, & tendantes à diminuer ces coordonnées, & les formules de l'article 2 donnent par conſéquent un moyen fort ſimple de faire cette réduction, c'eſt-à-dire, de trouver les réſultantes de tant de forces qu'on voudra qui concourent dans un même point, & qui aient des directions quelconques.

6. En général ſi des forces quelconques P, Q, R, &c, dirigées ſuivant les lignes p, q, r, &c, agiſſent ſur un même point, & qu'on veuille réduire toutes ces forces à trois autres, Ξ, Π, Σ, dirigées ſuivant les lignes ξ, π, σ, il n'y aura qu'à conſidérer l'équilibre des forces P, Q, R, &c, & Ξ, Π, Σ, appliquées à ce même point, & dirigées reſpectivement ſuivant les lignes p, q, r, &c, $-\xi$, $-\pi$, $-\sigma$, & former en conſéquence l'équation

$$Pdp + Qdq + Rdr + \&c - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0,$$

laquelle doit être vraie de quelque maniere qu'on faſſe varier la poſition du point de concours de toutes les forces. Or quelles que ſoient les lignes ξ, π, σ, il eſt clair, que pourvu

qu'elles ne ſoient pas toutes dans un même plan, elles ſuffiſent pour déterminer la poſition de ce point; par conſéquent on pourra toujours exprimer les lignes p, q, r, &c, par des fonctions de ξ, ϖ, σ, & l'équation précédente devra alors avoir lieu, par rapport aux variations de chacune de ces trois quantités en particulier; d'où il s'enſuit qu'on aura

$$\Xi = P\,\frac{dp}{d\xi} + Q\,\frac{dq}{d\xi} + R\,\frac{dr}{d\xi} + \&c$$

$$\Pi = P\,\frac{dp}{d\varpi} + Q\,\frac{dq}{d\pi} + R\,\frac{dr}{d\pi} + \&c$$

$$\Sigma = P\,\frac{dp}{d\sigma} + R\,\frac{dq}{d\sigma} + R\,\frac{dr}{d\sigma} + \&c.$$

Ces formules peuvent être d'une grande utilité dans pluſieurs occaſions, & ſur-tout lorſqu'il s'agit de trouver les réſultantes d'une infinité de forces qui agiſſent ſur un même point, comme l'attraction d'un corps de figure quelconque, &c.

7. Si l'on veut que les directions des forces réſultantes paſſent par des points donnés; alors nommant α, β, γ les coordonnées rectangles du point auquel doit tendre la force Ξ, & de même ε, ζ, η, & λ, μ, ν, les coordonnées rectangles des points de tendance des forces Π & Σ, on fera

$$\xi = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

$$\pi = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2},$$

& l'on tirera de ces équations les valeurs de x, y, z, en ξ, π, σ, qu'on ſubſtituera enſuite dans les expreſſions de p, q, r, &c, de l'article 2.

On pourroit encore considérer directement les quantités p, q, r, &c, ξ, ϖ, σ, comme des fonctions de x, y, z, & faisant varier chacune de ces trois quantités à part, on auroit ces équations,

$$\Xi \frac{d\xi}{dx} + \Pi \frac{d\varpi}{dx} + \Sigma \frac{d\sigma}{dx} = P \frac{dp}{dx} + Q \frac{dq}{dx} + R \frac{dr}{dx} + \&c$$

$$\Xi \frac{d\xi}{dy} + \Pi \frac{d\varpi}{dy} + \Sigma \frac{d\sigma}{dy} = P \frac{dp}{dy} + Q \frac{dq}{dy} + R \frac{dr}{dy} + \&c$$

$$\Xi \frac{d\xi}{dz} + \Pi \frac{d\varpi}{dz} + \Sigma \frac{d\sigma}{dz} = P \frac{dp}{dz} + Q \frac{dq}{dz} + R \frac{dr}{dz} + \&c,$$

par lesquelles on connoîtra les trois forces Ξ, Π, Σ.

Si la force Ξ devoit être dirigée comme auparavant à un point fixe, mais que les deux autres forces Π & Σ dussent être perpendiculaires à celle-là dans des plans donnés; alors on prendroit pour ϖ & σ les arcs de cercle décrits du rayon ξ dans les plans dont il s'agit; pour cela on regardera la droite ξ comme un rayon vecteur, & nommant ψ, φ les angles que ce rayon fait avec des plans perpendiculaires aux plans donnés, il est clair qu'on aura $d\varpi = \xi d\psi$, $d\sigma = \xi d\varphi$; d'ailleurs on pourra toujours, par les trois variables ξ, ψ & φ, déterminer la position du point auquel les forces sont appliquées; par conséquent on pourra exprimer les lignes p, q, r, &c, par des fonctions de ces mêmes variables; car il n'y aura pour cela qu'à exprimer d'abord les coordonnées rectangles x, y, z, en ξ, ψ, φ, & substituer ensuite ces expressions dans celles de p, q, r, &c. Considérant donc la variabilité de ξ, ψ, & φ, on aura les trois équations,

$$\Xi = P \frac{dp}{d\xi} + Q \frac{dq}{d\xi} + R \frac{dr}{d\xi} + \&c.$$

$$\Pi = P \frac{dp}{\xi d\psi} + Q \frac{dq}{\xi d\psi} + R \frac{dr}{\xi d\psi} + \&c$$

=P

$$\Sigma = P \frac{dp}{\xi d\varphi} + Q \frac{dq}{\xi d\varphi} + R \frac{dr}{\xi d\varphi} + \&c.$$

On voit par-là comment on doit s'y prendre dans tous les cas ſemblables, & combien la méthode précédente eſt utile pour trouver les réſultantes de tant de forces qu'on voudra, & les réduire à des directions données.

8. Reprenons les formules de l'article 2, & ſuppoſons en ſecond lieu que le corps ou point ſur lequel agiſſent les forces P, Q, R, &c, ne ſoit pas tout-à-fait libre, mais qu'il ſoit contraint de ſe mouvoir ſur une ſurface, ou ſur une ligne donnée; on aura alors entre les coordonnées x, y, z, une ou deux équations de condition, qui ne ſeront autre choſe que les équations mêmes de la ſurface ou de la ligne dont il s'agit.

Soit donc $L = 0$ l'équation de la ſurface ſur laquelle le corps ne peut que gliſſer, on ajoutera à la ſomme des momens des forces $X dx + Y dy + Z dz$ le terme λdL (Sect. quatrieme, art. 4, 5) & l'on aura pour l'équation générale de l'équilibre

$$X dx + Y dy + Z dz + \lambda dL = 0,$$

λ étant une quantité indéterminée.

Or L étant une fonction connue de x, y, z, on aura par la différentiation,

$$dL = \frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy + \frac{dL}{dz} dz;$$

donc ſubſtituant & égalant enſuite ſéparément à zéro la ſomme des termes multipliés par chacune des différences dx, dy, dz, on aura ces trois équations particulieres de l'équilibre

$$X + \lambda \frac{dL}{dx} = 0$$

$$Y + \lambda \frac{dL}{dy} = 0$$

$$Z + \lambda \frac{dL}{dz} = 0,$$

d'où chaſſant l'indéterminée λ, on aura ces deux-ci,

$$Y \frac{dL}{dx} - X \frac{dL}{dy} = 0,$$

$$Z \frac{dL}{dx} - X \frac{dL}{dz} = 0,$$

leſquelles renferment par conſéquent les conditions cherchées de l'équilibre du corps ſur la ſurface propoſée.

9. Si on applique maintenant ici la théorie donnée dans l'article 7 de la Section quatrième, on en conclura que la ſurface doit oppoſer au corps une réſiſtance égale à

$$\lambda \sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right)},$$

& dirigée ſuivant la perpendiculaire à la ſurface qui auroit pour équation $dL = 0$, c'eſt-à-dire, perpendiculairement à la même ſurface ſur laquelle le corps eſt poſé; & comme on a

$$\lambda \frac{dL}{dx} = -X, \lambda \frac{dL}{dy} = -Y, \lambda \frac{dL}{dz} = -Z,$$

il s'enſuit que la preſſion du corps ſur la ſurface (preſſion qui doit être égale & directement contraire à la réſiſtance de la ſurface) ſera exprimée par $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, & agira perpendiculairement à la même ſurface; & c'eſt uniquement à cette condition que ſe réduiſent les deux équations trouvées ci-deſſus pour l'équilibre du corps, comme on peut s'en aſſurer par la méthode de la compoſition des forces.

10. Au reſte dans le cas d'un ſeul corps tiré par des puiſſances données, on peut trouver encore plus ſimplement

les conditions de l'équilibre, en ſubſtituant immédiatement dans l'équation $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, à la place de la différentielle dz, ſa valeur $-\frac{\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy}{\frac{dL}{dz}}$, tirée de l'équation différentielle de la ſurface donnée ſur laquelle le corps peut gliſſer, & égalant enſuite ſéparément à zéro les coëfficiens des différentielles dx & dy qui demeurent indéterminées, ſuivant la méthode générale de l'article 10 de la ſeconde Section.

On aura ainſi ſur le champ les deux équations

$$X - Z\frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}} = 0$$

$$Y - Z\frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}} = 0,$$

qui reviennent au même que celles qu'on a trouvées plus haut.

Pareillement ſi le corps étoit aſſujetti à ſe mouvoir ſur une ligne de figure donnée, & déterminée par les deux équations différentielles $dy = p\,dx$, $dz = q\,dx$, il n'y auroit qu'à ſubſtituer ces valeurs de dy & dz dans $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, & l'on auroit, en diviſant par dx

$$X + Yp + Zq = 0,$$

pour la condition de l'équilibre.

Mais dans tous les cas où il y aura pluſieurs corps en équilibre, la méthode des coëfficiens indéterminés expoſée

dans la Section précédente, aura toujours l'avantage tant du côté de la facilité, que de celui de la ſimplicité & de l'uniformité du calcul.

§. II.

De l'équilibre de pluſieurs forces appliquées à un ſyſtême de corps conſidérés comme des points, & liés entr'eux par des fils ou par des verges.

11. Quelles que ſoient les forces qui agiſſent ſur chaque corps, nous avons vu ci-deſſus, (art. 2, 5), comment on peut toujours les réduire à trois, X, Y, Z, dirigées ſuivant les trois coordonnées rectangles x, y, z du même corps, & tendantes à diminuer ces coordonnées.

Nous ſuppoſerons donc pour plus de ſimplicité, ici & dans la ſuite, que toutes les forces extérieures qui agiſſent ſur un même point, ſoient réduites à ces trois X, Y, Z. Ainſi la ſomme des momens de ces forces ſera exprimée par la formule $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$; par conſéquent la ſomme totale des momens de toutes les forces du ſyſtême, ſera exprimée par la ſomme d'autant de formules ſemblables, qu'il y aura de corps ou points mobiles, en marquant par un, deux, trois, &c traits, les quantités qui ſe rapportent aux différens corps que nous nommerons premier, ſecond, troiſieme, &c.

De cette maniere on aura donc pour la ſomme des momens des forces qui agiſſent ſur trois ou ſur un plus grand nombre de corps, la quantité

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \&c.$$

Et il ne s'agira plus que de chercher les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, &c, résultantes de la nature du problême.

Ayant L, M, N, &c, ou seulement leurs différentielles en fonctions de x', y', z', x'', &c, & prenant des coëfficiens indéterminés λ, μ, ν, &c, on ajoutera à la quantité précédente les termes $\lambda dL + \mu dM + \nu dN +$ &c, & on égalera ensuite séparément à zéro les membres affectés de chacune des différences dx', dy', dz', dx'', &c, (Sect. précéd. art. 5).

12. Considérons premiérement trois corps attachés fixement à un fil inextensible; les conditions du problême sont que les distances entre le premier & le second corps, & entre le second & le troisieme soient invariables, ces distances étant les longueurs des portions de fil interceptées entre les corps. Nommant f la premiere de ces deux distances, & g la seconde, on aura $df = 0$, $dg = 0$ pour les équations de condition; donc $dL = df$, $dM = dg$, & l'équation générale de l'équilibre des trois corps sera

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg = 0.$$

Or il est visible qu'on aura

$$f = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2},$$

$$g = \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2};$$

donc en différentiant

$$df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f},$$

$$dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g},$$

ces valeurs étant ſubſtituées, on aura les neuf équations ſuivantes pour les conditions de l'équilibre du fil,

$$X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0$$

$$Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0$$

$$Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0$$

$$X'' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0$$

$$Y'' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \mu \frac{y''' - y''}{g} = 0$$

$$Z'' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \mu \frac{z''' - z''}{g} = 0$$

$$X''' + \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0$$

$$Y''' + \mu \frac{y''' - y''}{g} = 0$$

$$Z''' + \mu \frac{z''' - z''}{g} = 0,$$

& il n'y aura plus qu'à éliminer de ces équations les deux inconnues λ & μ; ce qui peut ſe faire de pluſieurs manieres, leſquelles fourniront auſſi des équations différentes, ou préſentées différemment pour l'équilibre des trois corps attachés au fil; nous choiſirons celle qui paroîtra la plus ſimple.

Il eſt d'abord viſible que ſi on ajoute reſpectivement les trois premieres équations aux trois ſuivantes, & aux trois dernieres, on obtient ces trois-ci délivrées des inconnues λ & μ.

$$X' + X'' + X''' = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0,$$

lesquelles montrent que la somme de toutes les forces paralleles à chacun des trois axes des coordonnées doit être nulle.

Il ne reste donc plus qu'à trouver quatre autres équations; pour cela faisant abstraction des trois premieres, j'ajoute respectivement les trois du milieu aux trois dernieres, j'ai celles-ci où μ ne se trouve plus;

$$X'' + X''' + \frac{\lambda}{f}(x'' - x') = 0$$

$$Y'' + Y''' + \frac{\lambda}{f}(y'' - y') = 0$$

$$Z'' + Z''' + \frac{\lambda}{f}(z'' - z') = 0;$$

& qui par l'élimination de λ donnent les deux suivantes,

$$Y'' + Y''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(X'' + X''') = 0$$

$$Z'' + Z''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}(X'' + X''') = 0.$$

Enfin considérant séparément les trois dernieres équations qui contiennent μ seul & éliminant μ, on aura ces deux autres-ci,

$$Y''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} X''' = 0$$

$$Z''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} X''' = 0.$$

Ces sept équations renferment les conditions nécessaires pour l'équilibre des trois corps.

13. Si le fil supposé toujours inextensible, étoit chargé de quatre corps, animés respectivement par les forces X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; X''', &c, suivant les directions des trois axes des coordonnées rectangles, on trouveroit par

des procédés ſemblables, qu'il me paroît inutile de répéter, les neuf équations ſuivantes pour l'équilibre de ces quatre corps,

$$X' + X'' + X''' + X^{IV} = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' + Y^{IV} = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' + Z^{IV} = 0$$

$$Y'' + Y''' + Y^{IV} - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (X'' + X''' + X^{IV}) = 0$$

$$Z'' + Z''' + Z^{IV} - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''' + X^{IV}) = 0$$

$$Y''' + Y^{IV} - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} (X''' + X^{IV}) = 0$$

$$Z''' + Z^{IV} - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} (X''' + X^{IV}) = 0$$

$$Y^{IV} - \frac{y^{IV} - y'''}{x^{IV} - x'''} X^{IV} = 0$$

$$Z^{IV} - \frac{z^{IV} - z'''}{x^{IV} - x'''} X^{IV} = 0.$$

Il eſt facile maintenant d'étendre cette ſolution à tel nombre de corps qu'on voudra, & même au cas de la funiculaire ou chaînette; mais nous traiterons ce cas en particulier, par la méthode expoſée à la fin de la Section précédente.

14. Si on vouloit que le premier corps fût fixe, alors les différences dx', dy', dz' ſeroient nulles, & les termes affectés de ces différences diſparoîtroient d'eux-mêmes dans l'équation générale de l'équilibre. Ainſi les trois premieres équations, ſavoir, $X' - \frac{\lambda}{f}(x'' - x') = 0$, $Y'' - \frac{\lambda}{f}(y'' - y') = 0$, $Z'' - \frac{\lambda}{f}(z'' - z') = 0$, n'auroient point lieu; donc les équations

tions $X' + X'' + X''' + \&c = 0$, $Y' + Y'' + Y''' + \&c = 0$, $Z' + Z'' + Z''' + \&c = 0$, n'auroient pas lieu non plus, mais toutes les autres demeureroient les mêmes. Ce cas est, comme l'on voit, celui où le fil seroit attaché fixement par une de ses extrémités.

Et si le fil étoit attaché par ses deux extrémités, alors on auroit non-seulement $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$, mais aussi $dx'''^{\&c} = 0$; $dy'''^{\&c} = 0$, $dz'''^{\&c} = 0$; & les termes affectés de ces six différences dans l'équation générale de l'équilibre, disparoîtroient, & feroient par conséquent disparoître aussi les six équations particulieres qui en dépendent.

15. En général si les deux extrémités du fil n'étoient pas tout-à-fait libres, mais qu'elles fussent attachées à des points mobiles suivant une loi donnée; cette loi exprimée analitiquement, donneroit une ou plusieurs équations entre les différences dx', dy', dz' qui se rapportent au premier corps, & les différences $dx'''^{\&c}$, $dy'''^{\&c}$, $dz'''^{\&c}$, qui se rapportent au dernier; & il faudroit ajouter ces équations multipliées chacune par un nouveau coëfficient indéterminé, à l'équation générale de l'équilibre trouvée plus haut; ou bien on substitueroit dans cette équation générale, la valeur d'une ou de plusieurs de ces différences, tirée des équations dont il s'agit, & on égaleroit ensuite à zéro le coëfficient de chacune de celles qui restent, ainsi qu'on a fait ci-dessus (art. 9). Comme cela n'a aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas.

16. Si on vouloit connoître les forces qui proviennent de la réaction du fil sur les différens corps, il n'y auroit qu'à faire usage de la méthode donnée pour cet objet dans la Sect. précédente (art. 7).

On considérera donc que l'on a dans le cas présent,

$$dL = df = \frac{(x''-x')(dx''-dx')+(y''-y')(dy''-dy')+(z''-z')(dz''-dz')}{f}$$

$$dM = dg = \frac{(x'''-x'')(dx'''-dx'')+(y'''-y'')(dy'''-dy'')+(z'''-z'')(dz'''-dz'')}{g}$$

&c.

Donc 1°, on aura par rapport au premier corps dont les coordonnées sont x', y', z', $\frac{dL}{dx'} = -\frac{x''-x'}{f}$, $\frac{dL}{dy'} = -\frac{y''-y'}{f}$, $\frac{dL}{dz'} = -\frac{z''-z'}{f}$; donc

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{((x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2)}}{f} = 1.$$

Ainsi le premier corps recevra par l'action des autres une force $= \lambda$, & dont la direction sera perpendiculaire à la surface représentée par l'équation $dL = df = 0$, en y faisant varier simplement x', y', z'; or il est visible que cette surface n'est autre chose qu'une sphere dont le rayon est f, & dont le centre répond aux coordonnées x'', y'', z''; par conséquent la force λ sera dirigée suivant ce même rayon, c'est-à-dire, le long du fil qui joint le premier & le second corps.

2°. On aura de même par rapport au second corps, dont les coordonnées sont x'', y'', z''; $\frac{dL}{dx''} = \frac{x''-x'}{df}$, $\frac{dL}{dy''} = \frac{y''-y'}{f}$, $\frac{dL}{dz''} = \frac{z''-z'}{f}$; donc

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{((x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2)}}{f} = 1;$$

d'où il s'ensuit que le second corps recevra aussi une force λ, dirigée perpendiculairement à la surface dont l'équation est $dL = df = 0$, en faisant varier x'', y'', z''; mais cette surface est de nouveau une sphere dont le rayon est f, mais dont le centre répondra aux coordonnées x', y', z' du premier corps; par conséquent la force λ qui agit sur le second corps, sera aussi dirigée suivant le fil f qui joint ce corps au premier.

3°. On aura de plus, par rapport au second corps, $\frac{dM}{dx''} = -\frac{x''' - x''}{g}$, $\frac{dM}{dy''} = -\frac{y''' - y''}{g}$, $\frac{dM}{dz''} = -\frac{z''' - z''}{g}$; donc

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz''}\right)^2\right)} = 1.$$

De sorte que le second corps sera poussé de plus par une force $= \mu$, dont la direction sera perpendiculaire à la surface représentée par l'équation $dg = 0$, en faisant varier x'', y'', z''; cette surface n'étant autre chose qu'une sphere dont le rayon est g, il s'ensuit que la direction de la force μ sera, suivant ce rayon, c'est-à-dire, suivant le fil qui joint le second corps au troisième.

On fera le même raisonnement par rapport aux autres corps, & on en tirera des conclusions semblables.

17. Il est évident que la force λ produite dans le premier corps, suivant la direction du fil qui joint ce corps au suivant, & la force égale λ, mais directement contraire, qui agit sur le second corps, suivant la direction du même fil, ne peuvent être que les forces qui résultent de la réaction de ce fil sur les deux corps, c'est-à-dire, de la tension que

ſouffre la portion du fil interceptée entre le premier & le ſecond corps; de ſorte que le coëfficient λ exprimera la quantité de cette tenſion. De même le coëfficient μ exprimera la tenſion de la portion du fil interceptée entre le ſecond & le troiſieme corps, & ainſi de ſuite.

Au reſte, on a ſuppoſé tacitement dans la ſolution du problême dont il s'agit, que chaque portion du fil étoit, non-ſeulement inextenſible, mais auſſi roide, enſorte qu'elle conſervoit toujours la même longueur; par conſéquent les forces λ, μ, &c, n'exprimeront les tenſions qu'autant qu'elles tendront à rapprocher les corps; mais ſi elles tendoient à les éloigner l'un de l'autre, alors elles exprimeroient plutôt les réſiſtances que le fil doit oppoſer au corps par le moyen de ſa roideur, où incompreſſibilité.

18. Pour confirmer ce que nous venons de démontrer, & pour donner en même-tems une nouvelle application de nos méthodes, nous ſuppoſerons que le fil auquel les corps ſont attachés, ſoit élaſtique & ſuſceptible d'extenſion & de contraction; & que F, G, &c, ſoient les forces de contraction des portions du fil f, g, &c, interceptées entre le premier & le ſecond corps, entre le ſecond & le troiſieme, &c.

Il eſt clair par ce qu'on a dit dans l'article 5 de la Section ſeconde, que les forces F, G, &c, donneront les momens $Fdf + Gdg$, &c.

Il faudra donc ajouter ces momens à ceux qui viennent de l'action des forces étrangeres, & que nous avons vu plus haut, être repréſentés par la formule $X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' +$ &c (art. 10), pour avoir la ſomme totale des

momens du ſyſtême; & comme il n'y a d'ailleurs aucune condition particuliere à remplir, relativement à la diſpoſition des corps, on aura l'équation générale de l'équilibre en égalant ſimplement à zéro la ſomme dont il s'agit, donc

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \&c + Fdf + Gdg + \&c = 0.$$

Subſtituant les valeurs de df, dg, &c, trouvées ci-deſſus (art. 11), & égalant à zéro la ſomme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', &c, on aura les équations ſuivantes pour l'équilibre du fil, dans le cas dont il s'agit.

$$X' - \frac{F(x''-x')}{f} = 0$$

$$Y' - \frac{F(y''-y')}{f} = 0$$

$$Z' - \frac{F(z''-z')}{f} = 0$$

$$X'' + \frac{F(x''-x')}{f} - \frac{G(x'''-x'')}{g} = 0$$

$$Y'' + \frac{F(y''-y')}{f} - \frac{G(y'''-y'')}{g} = 0$$

$$Z'' + \frac{F(z''-z')}{f} - \frac{G(z'''-z'')}{g} = 0$$

$$X''' + \frac{G(x'''-x'')}{g} = 0$$

$$Y''' + \frac{G(y'''-y'')}{g} = 0$$

$$Z''' + \frac{G(z'''-z'')}{g} = 0.$$

leſquelles ſont, comme l'on voit, analogues à celles du même article, pour le cas où le fil eſt inextenſible, en ſuppoſant $\lambda = F$, $\mu = G$, &c.

D'où l'on voit que les quantités F, G, &c, qui expriment ici les forces des fils ſuppoſés élaſtiques, ſont les mêmes que celles que nous avons trouvées ci-deſſus (art. 16), pour exprimer les forces des mêmes fils, dans la ſuppoſition qu'ils ſoient inextenſibles.

19. Reprenons encore le cas d'un fil inextenſible chargé de trois corps, mais ſuppoſons en même tems que le corps du milieu puiſſe couler le long du fil; dans ce cas la condition du problême ſera que la ſomme des diſtances entre le premier & le ſecond corps, & entre le ſecond & le troiſieme ſoit conſtante, ainſi nommant comme ci-deſſus f & g ces diſtances, on aura $f + g =$ conſt, & par conſéquent $df + dg = 0$.

On multipliera donc la quantité différentielle $df + dg$ par un coëfficient indéterminé λ, & on l'ajoutera à la ſomme des momens des différentes forces qu'on ſuppoſe agir ſur les corps, ce qui donnera cette équation générale de l'équilibre,

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz''$$
$$+ X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + \lambda (df + dg) = 0;$$

d'où (en ſubſtituant les valeurs de df & dg, & égalant à zéro la ſomme des termes affectés de chacune des différences dx', dy' &c), on tirera les équations ſuivantes pour l'équilibre du fil,

$$X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0$$

$$Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0$$

$$Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0$$

$$X'' + \lambda \left(\frac{x'' - x'}{f} - \frac{x''' - x''}{g} \right) = 0$$

$$Y'' + \lambda \left(\frac{y'' - y'}{f} - \frac{y''' - y''}{g} \right) = 0$$

$$Z'' + \lambda \left(\frac{z'' - z'}{f} - \frac{z''' - z''}{g} \right) = 0$$

$$X''' + \lambda \frac{x''' - x''}{g} = 0$$

$$Y''' + \lambda \frac{y''' - y''}{g} = 0$$

$$Z''' + \lambda \frac{z''' - z''}{g} = 0,$$

dans lesquelles il n'y aura plus qu'à éliminer l'inconnue λ.

On voit par-là comment il faudroit s'y prendre, s'il y avoit un plus grand nombre de corps dont les uns fussent attachés fixement au fil, & dont les autres y pussent couler librement.

20. Supposons maintenant que les trois corps soient unis par une verge inflexible, ensorte qu'ils soient obligés de garder toujours entr'eux les mêmes distances ; il faudra dans ce cas que l'on ait non-seulement $df = 0$ & $dg = 0$, mais que la différentielle de la distance entre le premier & le troisieme corps que nous désignerons par h, soit aussi nulle ; par conséquent en prenant trois coëfficiens indéterminés, λ, μ, ν, on aura cette équation générale de l'équilibre,

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'$$
$$+ X'' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh = 0,$$

Les valeurs de df & dg ont déja été données ci-dessus ; à l'égard de celle de dh, il est clair qu'on aura

$$h = \sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2},$$

& par conséquent

$$dh = \frac{(x''' - x')(dx''' - dx') + (y''' - y')(dy''' - dy') + (z''' - z')(dz''' - dz')}{h}.$$

Faisant ces substitutions, & égalant à zéro la somme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', &c, on aura ces neuf équations particulieres

$$X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \nu \frac{x''' - x'}{h} = 0$$

$$Y' - \frac{y'' - y'}{f} - \nu \frac{y''' - y'}{h} = 0$$

$$Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \nu \frac{z''' - z'}{h} = 0$$

$$X'' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0$$

$$Y'' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \mu \frac{y''' - y''}{g} = 0$$

$$Z'' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \mu \frac{z''' - z''}{g} = 0$$

$$X''' + \mu \frac{x''' - x''}{g} + \nu \frac{x''' - x'}{h} = 0$$

$$Y''' + \mu \frac{y''' - y''}{g} + \nu \frac{y''' - y'}{h} = 0$$

$$Z'' + \mu \frac{z''' - z''}{g} + \nu \frac{z''' - z'}{h} = 0,$$

d'où il faudra éliminer les trois inconnues indéterminées λ, μ, ν, ensorte qu'il ne restera que six équations pour les conditions de l'équilibre.

21. D'abord il est clair par la forme même de ces équations, qu'en ajoutant respectivement les trois premieres aux trois suivantes & ensuite aux trois dernieres, on obtient sur le champ trois équations délivrées de λ, μ, ν, lesquelles seront

$X' +$

$$X' + X'' + X''' = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0.$$

Rien n'eſt plus facile que de trouver encore trois autres équations par l'élimination de λ, μ, ν; mais pour y parvenir de la maniere la plus ſimple & la plus générale, je commence par déduire des équations ci-deſſus, ces neuf transformées,

$$X'y' - Y'x' - \lambda \frac{y'x'' - x'y''}{f} - \nu \frac{y'x''' - x'y'''}{h} = 0$$

$$X'z' - Z'x' - \lambda \frac{z'x'' - x'z''}{f} - \frac{z'x''' - x'z'''}{h} = 0$$

$$Y'z' - Z'y' - \lambda \frac{z'y'' - y'z''}{f} - \nu \frac{z'y'' - y'z'''}{h} = 0$$

$$X''y'' - Y''x'' + \lambda \frac{y'x'' - x'y''}{f} - \mu \frac{y''x''' - y'''}{g} = 0$$

$$X''z'' - Z''x'' + \lambda \frac{z'x'' - x'z''}{f} - \mu \frac{z''x''' - x''z'''}{g} = 0$$

$$Y''z'' - Z''y'' + \lambda \frac{y'y'' - y'x''}{f} - \mu \frac{z''y''' - y''z'''}{g} = 0$$

$$X'''y''' - Y''x''' + \mu \frac{y''x''' - x''y''}{g} + \nu \frac{y'x''' - x'y'''}{h} = 0$$

$$X'''z'' - Z'''x''' + \mu \frac{z''x''' - x''z'''}{g} + \nu \frac{z'x''' - x'z'''}{h} = 0$$

$$Y'''z''' - Z'''y''' + \mu \frac{z''y''' - y'z'''}{g} + \nu \frac{z'y''' - y'z'''}{h} = 0,$$

leſquelles étant, comme l'on voit, analogues aux équations primitives, donneront de la même maniere, par la ſimple addition, ces trois-ci,

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' = 0$$
$$X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' = 0$$
$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' = 0.$$

Les trois premieres équations montrent que la ſomme des forces paralleles à chacun des trois axes des coordonnées, doit être nulle; & les trois dernieres renferment le principe connu des momens (en entendant par moment le produit de la puiſſance par ſon bras de levier) par lequel il faut que la ſomme des momens de toutes les forces, pour faire tourner le ſyſtême autour de chacun des trois axes, ſoit auſſi nulle.

22. Si le premier corps étoit fixe, alors les différences dx', dy', dz' ſeroient nulles, & les trois premieres des neuf équations de l'article 20 n'exiſteroient pas; il n'y auroit donc alors que ſix équations, qui par l'élimination des trois inconnues λ, μ, ν, ſe réduiroient à trois.

Pour arriver à ces trois équations, on peut s'y prendre d'une maniere analogue à celle dont on s'eſt ſervi pour trouver les trois dernieres équations de l'article 21, pourvu qu'on ait ſoin de faire enſorte que les transformées ne renferment point les indéterminées λ & ν qui entrent dans les trois premieres dont il faut faire maintenant abſtraction; or c'eſt ce que l'on obtiendra par ces combinaiſons,

$$X''(y''-y') - Y''(x''-x') - \mu \frac{(y''-y')(x'''-x'') - (x''-x')(y'''-y'')}{g} = 0$$
$$X''(z''-z') - Z''(x''-x') - \mu \frac{(z''-z')(x'''-x'') - (x''-x')(z'''-z')}{g} = 0$$
$$Y''(z''-z') - Z''(y''-y') - \mu \frac{(z''-z')(y'''-y'') - (y''-y')(z'''-z')}{}= 0$$

$$X'''(y'''-y')-Y'''(x'''-x')+\mu\,\frac{(y''-y')(x'''-x'')-(x''-x')(y'''-y'')}{g}=0$$

$$X'''(z'''-z')-Z'''(x'''-x')+\mu\,\frac{(z''-z')(x'''-x'')-(x''-x')(z'''-z'')}{g}=0$$

$$Y'''(z'''-z')-Z'''(y'''-y')+\mu\,\frac{(z''-z')(y'''-y'')-(y''-y')(z'''-z'')}{g}=0;$$

& si l'on ajoute maintenant les trois premieres de ces transformées aux trois dernieres, on aura sur le champ ces trois-ci,

$$X''(y''-y')-Y''(x''-x')+X'''(y'''-y')-Y'''(x'''-x')=0$$

$$X''(z''-z')-Z''(x''-x')+X'''(z'''-z')-Z'''(x'''-x')=0$$

$$Y''(z''-z')-Z''(y''-y')+Y'''(z'''-z')-Z'''(y'''-y')=0,$$

lesquelles auront toujours lieu, quel que soit l'état du premier corps, puisqu'elles sont indépendantes des équations relatives à ce corps. Ces équations renferment, comme l'on voit, le même principe des momens, mais par rapport à des axes qui passeroient par le premier corps.

23. Supposons qu'il y ait un quatrieme corps attaché à la même verge inflexible, pour lequel les coordonnées rectangles soient x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}, & les forces paralleles à ces coordonnées X^{IV}, Y^{IV}, Z^{IV}.

Il faudra donc ajouter à la somme des momens des forces, la quantité $X^{IV}dx^{IV}+Y^{IV}dy^{IV}+Z^{IV}dz^{IV}$; ensuite, comme les distances entre tous les corps doivent demeurer constantes, on aura par les conditions du problême, non-seulement $df=0$, $dg=0$, $dh=0$, comme dans le cas précédent; mais aussi $dl=0$, $dm=0$, $dn=0$, en nommant l, m, n les distances du quatrieme corps aux trois précédens. Ainsi l'équation générale de l'équilibre sera dans ce cas

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + X^{IV}dx^{IV} + Y^{IV}dy^{IV} + Z^{IV}dz^{IV} + \lambda df + \mu dg + \nu dh + \pi dl + \rho dm + \sigma dn = 0.$$

Les valeurs de df, dg, dh ſont les mêmes que ci-deſſus ; quant à celles de dl, dm, dn, il eſt viſible qu'on aura

$$l = \sqrt{(x^{IV} - x')^2 + (y^{IV} - y')^2 + (z^{IV} - z')^2}$$
$$m = \sqrt{(x^{IV} - x'')^2 + (y^{IV} - y'')^2 + (z^{IV} - z'')^2}$$
$$n = \sqrt{(x^{IV} - x''')^2 + (y^{IV} - y''')^2 + (z^{IV} - z''')^2},$$

& par conſéquent,

$$dl = \frac{(x^{IV} - x')(dx^{IV} - dx') + (y^{IV} - y')(dy^{IV} - dy') + (z^{IV} - z')(dz^{IV} - dz')}{l}$$
$$dm = \frac{(x^{IV} - x'')(dx^{IV} - dx'') + (y^{IV} - y'')(dy^{IV} - dy'') + (z^{IV} - z'')(dz^{IV} - dz'')}{m}.$$
$$dn = \frac{(x^{IV} - x''')(dx^{IV} - dx''') + (y^{IV} - y''')(dy^{IV} - dy''') + (z^{IV} - z''')(dz^{IV} - dz''')}{n}$$

Faiſant ces ſubſtitutions, & égalant à zéro la ſomme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', &c, on trouvera douze équations particulieres, dont les neuf premieres ſeront les mêmes que celles de l'article 20, en ajoutant reſpectivement à leurs premiers membres les quantités ſuivantes,

$$-\pi\frac{x^{IV} - x'}{l}, \; -\pi\frac{y^{IV} - y'}{l}, \; -\pi\frac{z^{IV} - z'}{l},$$
$$-\rho\frac{x^{IV} - x''}{m}, \; -\rho\frac{y^{IV} - y''}{m}, \; -\rho\frac{z^{IV} - z''}{m},$$
$$-\sigma\frac{x^{IV} - x'''}{n}, \; -\sigma\frac{y^{IV} - y'''}{n}, \; -\sigma\frac{z^{IV} - z'''}{n};$$

& dont les trois dernieres ſeront

$$X^{IV} + \pi \frac{x^{IV} - x'}{l} + \rho \frac{x^{IV} - x''}{m} + \sigma \frac{x^{IV} - x'''}{n} = 0$$

$$Y^{IV} + \pi \frac{y^{IV} - y'}{l} + \rho \frac{y^{IV} - y''}{m} + \sigma \frac{y^{IV} - y'''}{n} = 0$$

$$Z^{IV} + \pi \frac{z^{IV} - z'}{l} + \rho \frac{z^{IV} - z''}{m} + \sigma \frac{z^{IV} - z'''}{n} = 0.$$

24. Comme il y a en tout douze équations, & qu'il y y a ſix indéterminées, λ, μ, ν, π, ρ, σ à éliminer, il ne reſtera pour les conditions de l'équilibre, que ſix équations finales comme dans le cas de trois corps; & on trouvera par une méthode ſemblable à celle de l'article 21, ces ſix équations analogues à celles de cet article,

$$X' + X'' + X''' + X^{IV} = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' + Y^{IV} = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' + Z^{IV} = 0$$

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + X^{IV}y^{IV} - Y^{IV}x^{IV} = 0$$

$$X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' + X^{IV}z^{IV} - Z^{IV}x^{IV} = 0$$

$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' + Y^{IV}z^{IV} - Z^{IV}y^{IV} = 0.$$

Au lieu des trois dernieres, on pourra auſſi ſubſtituer les trois ſuivantes, qu'on trouvera par la méthode de l'article 22, & qui étant indépendantes des équations relatives au premier corps, ont l'avantage d'avoir toujours lieu, quel que ſoit l'état de ce corps,

$$X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') + X'''(y''' - y') - Y'''(x''' - x')$$
$$+ X^{IV}(y^{IV} - y') - Y^{IV}(x^{IV} - x') = 0,$$

$$X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') + X'''(z''' - z') - Z'''(x''' - x')$$
$$+ X^{IV}(z^{IV} - z') - Z^{IV}(x^{IV} - x') = 0,$$

$$Y''(z''-z')-Z''(y''-y')+Y'''(z'''-z')-Z'''(y'''-y')$$
$$+Y^{iv}(z^{iv}-z')-Z^{iv}(y^{iv}-y')=0.$$

25. On voit maintenant comment il faudroit s'y prendre pour trouver les conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de corps attachés à une verge ou à un levier inflexible. En général il est visible que pour que la position respective des corps demeure la même, il suffit que les distances des trois premiers corps entr'eux soient constantes, & que les distances de chacun des autres corps à ces trois-ci le soient aussi, puisque la position d'un point quelconque est toujours déterminée par les distances de ce point à trois points donnés; on fera donc pour chaque nouveau corps qu'on ajoutera au levier, les mêmes raisonnemens & les mêmes opérations qu'on a faites dans l'article 23, relativement au quatrieme corps; & chacun d'eux fournira trois nouvelles équations particulieres, avec trois nouvelles indéterminées à éliminer; ensorte que les équations finales seront toujours en même nombre que dans le cas de trois corps; & elles seront de la même forme que celles que nous venons de trouver dans l'article précédent.

Au reste, il est visible que ces équations rentrent dans celles que nous avons trouvées en général pour l'équilibre d'un systême quelconque libre, dans les articles 3 & 6 de la Section troisieme. En effet, puisque, à cause de l'inflexibilité de la verge, les distances des corps entr'eux sont inaltérables, il s'ensuit que l'équilibre doit avoir lieu, pourvu que les mouvemens de translation & de rotation soient détruits; & l'on auroit pu par cette seule considération, résoudre le problême précédent, d'après les formules des

articles cités ; mais nous avons cru qu'il n'étoit pas inutile d'en donner une ſolution directe, & tirée des conditions particulieres de la queſtion.

26. Conſidérons de nouveau le cas de trois corps joints par une verge ; & ſuppoſons de plus que la verge ſoit élaſtique dans le point où eſt le ſecond corps, enſorte que les diſtances de celui-ci au premier & au dernier ſoient conſtantes, mais que l'angle formé par les lignes de ces diſtances ſoit variable, & que l'effet de l'élaſticité conſiſte à augmenter cet angle, & par conſéquent à diminuer l'angle extérieur formé par un des côtés, & par le prolongement de l'autre.

Nommons la force de l'élaſticité E, & l'angle extérieur ſuivant lequel elle s'exerce e; il eſt facile de conclure de ce que nous avons établi dans la ſeconde Section, que le moment de la force E devra être repréſenté par $E\,de$; de ſorte que la ſomme des momens de toutes les forces du ſyſtême ſera $X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + E\,de$.

Or les conditions du problême ſont les mêmes ici que dans l'article 11, c'eſt-à-dire, $df = 0$ & $dg = 0$. Donc on aura cette équation générale de l'équilibre

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + E\,de + \lambda df + \mu dg = 0;$$

& il ne s'agira que d'y ſubſtituer les valeurs de de, df, dg; celles de df & dg ſont les mêmes que dans l'article cité; & pour trouver la valeur de de, on remarquera que dans le triangle dont les trois côtés ſont f, g, h, (art. 20), $180° - e$ eſt l'angle oppoſé au côté h; enſorte

que par le théorême connu, on aura cof. $e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$; d'où l'on tirera par la différenciation la valeur de de; & comme par les conditions du problême on a $df = 0$ & $dg = 0$, il fuffira de faire varier e & h, ce qui donnera $de = \frac{h\,dh}{fg \text{ fin } e}$; cette valeur étant fubftituée dans l'équation précédente, il eft clair qu'elle deviendra de la même forme que l'équation générale de l'équilibre dans le cas de l'article 20, en fuppofant dans celle-ci $\nu = \frac{Eh}{fg \text{ fin } e}$; par conféquent les équations particulieres feront encore les mêmes dans les deux cas, avec cette feule différence, que dans celui de l'article cité, la quantité ν eft indéterminée, & doit par conféquent être éliminée; au lieu que dans le cas préfent, cette quantité eft toute connue, & qu'il n'y a que les deux indéterminées λ, μ à éliminer; enforte qu'il doit refter une équation finale de plus que dans le cas cité, c'eft-à-dire, fept équations finales au lieu de fix. Or comme, foit que la quantité ν foit connue ou non, rien n'empêche de l'éliminer avec les deux autres λ, μ, il eft clair qu'on aura auffi dans le cas préfent les mêmes équations qu'on a trouvées dans les articles 21 & 22; & pour trouver la feptieme équation, il n'y aura qu'à éliminer λ dans les trois premieres, ou μ dans les trois dernieres des neuf équations particulieres de l'article 21, & fubftituer pour ν fa valeur $\frac{Eh}{fg \text{ fin } e}$.

27. Au refte, fi dans la valeur de de on n'avoit pas voulu fuppofer df & dg nuls, on auroit eu une expreffion de cette forme $de = \frac{h\,dh}{fg \text{ fin } e} + A\,df + B\,dg$, A & B étant

des

des fonctions de f, g, h, ſin e; alors les trois termes $E\,de + \lambda\, df + \mu\, dg$ de l'équation générale, ſeroient devenus $\frac{Eh}{fg \text{ ſin } e}\, dh + (FA + \lambda)\, df + (EB + \mu)\, dg$; mais λ & μ étant deux quantités indéterminées, il eſt viſible qu'on peut mettre à leur place $\lambda - EA$, $\mu - EB$; moyennant quoi la quantité dont il s'agit deviendra $\frac{Eh}{fg \text{ ſin } e}\, dh + \lambda\, df + \mu\, dg$ comme ſi f & g n'euſſent point varié dans l'expreſſion de de.

28. Si pluſieurs corps étoient joints enſemble par des verges élaſtiques, on trouveroit de la même maniere les équations néceſſaires pour l'équilibre de ces corps, & en général notre méthode donnera toujours, avec la même facilité, les conditions de l'équilibre d'un ſyſtême de corps liés entr'eux d'une maniere quelconque, & animés de telles forces extérieures qu'on voudra. La marche du calcul eſt, comme l'on voit, toujours uniforme; ce qu'on doit regarder comme un des principaux avantages de cette méthode.

§. III.

De l'équilibre d'un fil dont tous les points ſont tirés par des forces quelconques, & qui eſt ſuppoſé parfaitement flexible ou inflexible, ou élaſtique, & en même-tems extenſible ou non.

29. C'eſt ici le lieu d'employer la méthode que nous avons expoſée dans les articles 9 & ſuiv. de la Section quatrieme.

Nous ſuppoſerons toujours, pour plus de ſimplicité, que toutes les forces extérieures qui agiſſent ſur chaque point du fil ſoient réduites à trois, X, Y, Z, dirigées ſuivant les coordonnées rectangles x, y, z de ce point. Ainſi en nommant dm l'élément du fil, on aura pour la ſomme des momens de toutes ces forces, relativement à la longueur totale du fil, cette formule intégrale (Art. 13, Sect. 4),

$$S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm.$$

30. Conſidérons le cas d'un fil parfaitement flexible & inextenſible; nommant ds l'élément de la courbe de ce fil, lequel eſt exprimé par $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; il faudra par la condition de l'inextenſibilité, que ds ſoit une quantité invariable, & qu'ainſi l'on ait par rapport à chaque élément du fil, cette équation de condition indéfinie $\delta ds = 0$. Multipliant donc δds par une quantité indéterminée λ, & prenant l'intégrale totale, on aura $S\lambda\delta ds$; & ſi l'on n'a point d'autre équation de condition, on aura l'équation générale de l'équilibre, en égalant à zéro la ſomme des deux intégrales qu'on vient de trouver.

Or ayant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on aura en différentiant ſuivant δ,

$$\delta ds = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds};$$

donc $S\lambda\delta ds = S\frac{\lambda dx}{dx}\delta dx + S\frac{\lambda dy}{ds}\delta dy + S\frac{\lambda dz}{ds}\delta dz$;

changeant δd en $d\delta$, & intégrant par parties pour faire diſparoître le d avant δ, ſuivant les régles données dans l'article 17 de la Section quatrieme, on aura ces transformées,

$$S\,\frac{\lambda dx}{ds}\,\delta dx = \frac{\lambda'' dx''}{ds''}\,\delta x'' - \frac{\lambda' dx'}{ds'}\,\delta x' - S\,d.\,\frac{\lambda dx}{ds}\times\delta x$$

$$S\,\frac{\lambda dy}{ds}\,\delta dy = \frac{\lambda'' dy''}{ds''}\,\delta y'' - \frac{\lambda' dy'}{ds'}\,\delta y' - S\,d.\,\frac{\lambda dy}{ds}\times\delta y$$

$$S\,\frac{\lambda dz}{ds}\,\delta dz = \frac{\lambda'' dz''}{ds''}\,\delta z'' - \frac{\lambda' dz''}{ds'}\,\delta z' - S\,d.\,\frac{\lambda dz}{ds}\times\delta z.$$

Ainsi l'équation générale de l'équilibre deviendra

$$S\left(\left(Xdm - d.\,\frac{\lambda dx}{ds}\right)\delta x + \left(Ydm - d.\,\frac{\lambda dy}{ds}\right)\delta y + \left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds}\right)\delta z\right) + \frac{\lambda'' dx''}{ds''}\,\delta x'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''}\,\delta y'' + \frac{\lambda'' dx''}{ds''}\,\delta z'' - \frac{\lambda' dx'}{ds'}\,\delta x' - \frac{\lambda' dy'}{ds'}\,\delta y' - \frac{\lambda' dz'}{dz'}\,\delta z' = 0.$$

31. On égalera d'abord à zéro (art. 18, Sect. citée), les coëfficiens de δx, δy, δz sous le signe S, & l'on aura ces trois équations particulieres & indéfinies,

$$Xdm - d.\,\frac{\lambda dx}{ds} = 0$$

$$Ydm - d.\,\frac{\lambda dy}{ds} = 0$$

$$Zdm - d.\,\frac{\lambda dz}{ds} = 0,$$

d'où éliminant l'indéterminée λ, il restera deux équations qui serviront à déterminer la courbe du fil.

Cette élimination est très-facile, car on n'a qu'à intégrer les équations précédentes, ce qui donnera celles-ci,

$$\frac{\lambda dx}{ds} = A + \int Xdm$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} = B + \int Ydm$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} = C + \int Zdm,$$

A, *B*, *C* étant des conſtantes arbitraires; enſuite on aura en chaſſant λ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \int Y dm}{A + \int X dm}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C + \int Z dm}{A + \int X dm}$$

équations qui s'accordent avec les formules connues de la chaînette.

32. Si on veut parvenir directement à des équations purement différentielles & ſans ſigne $\int$, on mettra les équations trouvées ſous cette forme,

$$X dm - \lambda d. \frac{dx}{ds} - d\lambda \frac{dx}{ds} = 0$$

$$Y dm - \lambda d. \frac{dy}{ds} - d\lambda \frac{dy}{ds} = 0$$

$$Z dm - \lambda d. \frac{dz}{ds} - d\lambda \frac{dz}{ds} = 0$$

d'où éliminant $d\lambda$, on aura d'abord ces deux-ci;

$$\frac{X dy - Y dx}{ds} dm = \lambda \left(\frac{dy}{ds} d. \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d. \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\frac{X dz - Z dx}{ds} dm = \lambda \left(\frac{dz}{ds} d. \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d. \frac{dz}{ds} \right);$$

enſuite ſi on multiplie les mêmes équations reſpectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, on aura, à cauſe de $\frac{dx}{ds} d. \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d. \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d. \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} d. \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} \right) = 0$, $\frac{X dx + Y dy + Z dz}{ds} dm = d\lambda$; & il n'y aura plus qu'à ſubſtituer dans cette derniere les valeurs de λ tirées des précédentes.

33. Considérons maintenant les termes de l'équation générale qui sont hors du signe S; & supposons premiérement que le fil soit entiérement libre; dans ce cas les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, & $\delta z''$, $\delta y''$, $\delta z''$ qui répondent aux deux points extrêmes du fil, seront toutes indéterminées & arbitraires; par conséquent il faudra que chaque terme affecté de ces variations soit nul de lui-même. Donc il faudra que l'on ait $\lambda' = 0$ & $\lambda'' = 0$, c'est-à-dire que la valeur de λ devra être nulle au commencement & à la fin du fil. On remplira cette condition par le moyen des constantes. Ainsi, comme les trois premieres équations intégrales de l'article 32, donnent pour le premier point du fil où les quantités affectées de $\int$ deviennent nulles,

$\frac{\lambda' dx'}{ds'} = A$, $\frac{\lambda' dy'}{ds'} = B$, $\frac{\lambda' dz'}{ds'} = C$, & pour le dernier point du fil où $\int$ se change en S,

$$\frac{\lambda'' dx''}{ds''} = A + SXdm, \ \frac{\lambda'' dy''}{ds'} = B + SYdm, \ \frac{\lambda'' dz''}{ds''} = C + SZdm,$$

on aura dans le cas dont il s'agit, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, & $SXdm = 0$, $SYdm = 0$, $SZdm = 0$. Ces trois dernieres équations répondent, comme l'on voit, aux trois premieres de l'article 12 de la Section présente.

34. Supposons en second lieu que le fil soit attaché par un de ses bouts, ou par tous les deux; & si c'est le premier bout qui est fixe, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ seront nulles, & il suffira d'égaler à zéro les coëfficiens de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, c'est-à-dire, de faire $\lambda'' = 0$.

Par la même raison, lorsque le second bout sera fixe, il suffira de faire $\lambda' = 0$. Mais si les deux bouts étoient fixes

à la fois, alors il n'y auroit aucune condition particuliere à remplir, puiſque les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ ſeroient toutes nulles.

35. Suppoſons en troiſieme lieu que les extrémités du fil ſoient attachées à des lignes ou ſurfaces courbes, le long deſquelles elles puiſſent gliſſer librement; & ſoient, par exemple, $dz' = a'dx' + b'dy'$, $dz'' = a''dx'' + b''dy''$ les équations différentielles des ſurfaces auxquelles le premier & le dernier point du fil ſont attachés; on aura pareillement en changeant d en δ, $\delta z' = a'\delta x' + b'\delta y'$, $\delta z'' = a''\delta x'' + b''\delta y''$; on ſubſtituera donc ces valeurs dans les termes dont il s'agit, on égalera enſuite à zéro les coëfficiens de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$.

En général on traitera la partie qui eſt hors du ſigne dans l'équation générale de l'équilibre, comme ſi elle étoit ſeule, & qu'elle repréſentât l'équation de l'équilibre de deux corps ſéparés & placés aux extrémités du fil.

36. Suppoſons, par exemple, que le fil ſoit attaché par ſes deux bouts aux extrémités d'un levier mobile autour d'un point fixe. Soient a, b, c les trois coordonnées rectangles qui déterminent dans l'eſpace la poſition de ce point fixe, c'eſt-à-dire, du point d'appui du levier, & ſoient de plus f la diſtance entre ce point d'appui & l'extrémité du levier, à laquelle eſt attaché le premier bout du fil, g la diſtance entre le même point d'appui & l'autre extrémité du levier à laquelle eſt attaché le ſecond bout du fil, h la diſtance entre les deux extrémités du levier, & par conſéquent auſſi entre les deux bouts du fil; il eſt clair que ces ſix quantités a, b, c, f, g, h ſont données par la nature du problême, &

il eſt viſible en même-tems que x', y', z' étant les coordonnées pour le commencement de la courbe du fil, & x'', y'', z'' les coordonnées pour la fin de la même courbe, on aura

$$f = \sqrt{(a - x')^2 + (b - y')^2 + (c - z')^2},$$

$$g = \sqrt{(a - x'')^2 + (b - y'')^2 + (c - z'')^2},$$

$$h = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

Or ces quantités f, g, h étant invariables, on aura donc en différentiant par δ ces trois équations de condition déterminées,

$$(a - x')\,\delta x' + (b - y')\,\delta y' + (c - z')\,\delta z' = 0$$

$$(a - x'')\,\delta x'' + (b - y'')\,\delta y'' + (c - z'')\,\delta z'' = 0$$

$$(x'' - x')(\delta x'' - \delta x') + (y'' - y')(\delta y'' - \delta y') + (z'' - z')(\delta z'' - \delta z') = 0,$$

qui étant multipliées chacune par un coëfficient indéterminé, devront être auſſi ajoutées à l'équation générale de l'équilibre. Ainſi prenant α, β, γ pour les trois coëfficiens dont il s'agit, & égalant à zéro les coëfficiens des ſix variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, on aura autant d'équations particulieres déterminées, qui ſeront

$$\alpha(a - x') - \gamma(x'' - x') - \frac{\lambda' dx'}{ds'} = 0$$

$$\alpha(b - y') - \gamma(y'' - y') - \frac{\lambda' dy'}{ds'} = 0$$

$$\alpha(c - z') - \gamma(z'' - z') - \frac{\lambda' dz'}{ds'} = 0$$

$$\beta(a - x'') + \gamma(x'' - x') + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} = 0$$

$$\beta(b-y'')+\gamma(y''-y')+\frac{\lambda''dy''}{ds''}=0$$

$$\beta(c-z'')+\gamma(z''-z')+\frac{\lambda''dz''}{ds''}=0,$$

& qui, par l'élimination de α, β, γ, ſe réduiront à trois.

Ces trois étant enſuite combinées avec les trois équations de condition ci-deſſus, ſerviront à déterminer la poſition du levier.

On voit par-là comment il faudra s'y prendre dans d'autres cas ſemblables.

37. Enfin, ſi outre les forces qui animent chaque point du fil, il y en avoit de particulieres appliquées aux deux extrémités du fil, & repréſentées par X', Y', Z' pour le premier bout du fil, & par X'', Y'', Z'' pour le dernier bout, ces forces donneroient les momens

$$X'\delta x'+Y'\delta y'+Z'\delta z'+X''\delta x''+Y''\delta y''+Z''\delta z'',$$

& il faudroit ajouter encore cette quantité au premier membre de l'équation générale de l'équilibre, c'eſt-à-dire, à la partie qui eſt hors du ſigne, laquelle deviendroit alors

$$\left(X''+\frac{\lambda''dx''}{ds''}\right)\delta x''+\left(Y''+\frac{\lambda''dy''}{ds''}\right)\delta y''+\left(Z''+\frac{\lambda''dz''}{ds''}\right)\delta z''$$

$$+\left(X'-\frac{\lambda'dx'}{ds'}\right)\delta x'+\left(Y'-\frac{\lambda'dy'}{ds'}\right)\delta y'+\left(Z'-\frac{\lambda'dz'}{ds'}\right)\delta z',$$

& ſur laquelle on opéreroit dans les différens cas, comme on vient de le voir dans les articles précédens.

38. Suppoſons maintenant que le fil animé dans tous ſes points par les mêmes forces X, Y, Z, & tiré de plus dans ſes deux extrémités par les forces X', Y', Z', X'', Y'', Z'', doive être couché ſur une ſurface courbe donnée, dont

l'équation

l'équation ſoit $dz = p\,dx + q\,dy$, & que l'on demande la figure & la poſition de ce fil ſur la même ſurface pour qu'il ſoit en équilibre.

Ce problême qui ſeroit peut-être aſſez difficile à traiter par les principes ordinaires de la Méchanique, ſe réſout très-facilement par notre méthode & par nos formules; en effet, l'équation de la ſurface donnée, donne en changeant d en δ, $\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$; ainſi il n'y aura qu'à ſubſtituer cette valeur de δz dans les termes ſous le ſigne de l'équation générale de l'équilibre du fil (art. 30) & enſuite égaler ſéparément à zéro les quantités affectées de δx, & de δy. On aura par ce moyen ces deux équations indéfinies,

$$X\,dm - d.\frac{\lambda\,dx}{ds} + p\left(Z\,dm - d.\frac{\lambda\,dz}{ds}\right) = 0$$

$$Y\,dm - d.\frac{\lambda\,dy}{ds} + q\left(Z\,dm - d.\frac{\lambda\,dz}{ds}\right) = 0,$$

leſquelles ſerviront à déterminer la courbe du fil, étant combinées avec l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ de la ſurface, & étant débarraſſées, par l'élimination, de l'indéterminée λ.

39. De plus, comme on ſuppoſe que le fil ſoit appliqué dans toute ſa longueur à la même ſurface, on aura auſſi pour ſes deux points extrêmes, $\delta z' = p'\,\delta x' + q'\,\delta y'$, & $\delta z'' = p''\,\delta x'' + q''\,\delta y''$. On fera donc encore ces ſubſtitutions dans les termes hors du ſigne de l'équation générale (art. 30), ou plutôt dans la formule donnée dans l'article 37, & dans laquelle on a eu égard aux forces X', Y', &c; on égalera enſuite ſéparément à zéro les quantités affectées de chacune des quatre variations reſtantes $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$; l'on aura ces quatre nouvelles équations déterminées,

$$X' - \frac{\lambda' dx'}{ds'} + p'\left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right) = 0$$

$$Y' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} + q'\left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right) = 0$$

$$X'' + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} + p''\left(Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''}\right) = 0$$

$$Y'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} + q''\left(Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''}\right) = 0,$$

auxquelles il faudra ſatisfaire par le moyen des conſtantes.

40. Mais au lieu de ſubſtituer, ainſi que nous venons de le faire, la valeur de δz en δx & δy tirée de l'équation $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$, on pourroit regarder cette même équation comme une nouvelle équation de condition indéterminée; il faudroit alors multiplier cette équation par un autre coëfficient indéterminé μ, en prendre l'intégrale totale, & l'ajouter à l'équation générale de l'équilibre (art. 30). De cette maniere la partie ſous le ſigne deviendroit

$$S\left[\left(Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} - \mu p\right)\delta x + \left(Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} - \mu q\right)\delta y + \left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds} + \mu\right)\delta z\right],$$

& l'on auroit immédiatement ces trois équations indéfinies,

$$Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} - \mu p = 0$$

$$Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} - \mu q = 0$$

$$Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds} - \mu = 0,$$

leſquelles par l'élimination de μ redonneront les mêmes équations déja trouvées (art. 38). Mais ces dernieres ont de plus l'avantage de faire connoître en même-tems la preſſion

que chaque élément du fil exerce ſur la ſurface d'après la théorie donnée dans l'article 7 de la Section quatrieme.

41. En effet, il eſt facile de déduire de cette théorie que les termes $\mu\,(\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y)$ provenants de l'équation de condition $\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0$, peuvent repréſenter l'effet d'une force égale à $\mu\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, & appliquée à chaque élément dm du fil dans une direction perpendiculaire à la ſurface qui a pour équation $\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0$, ou bien $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, c'eſt à la ſurface même ſur laquelle le fil eſt ſuppoſé couché. Cette ſurface fait donc l'effet de la force en queſtion, laquelle ſera par conſéquent égale & directement contraire à la preſſion exercée par le fil ſur la même ſurface (art. 8, Sect. 4). De ſorte que la preſſion de chaque point du fil ſera = $\frac{\mu\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}{dm}$, ou bien en ſubſtituant les valeurs de μ, μp, μq tirées des équations ci-deſſus,

$$\sqrt{\left(\left(X - \frac{1}{dm}\times d.\frac{\lambda\,dx}{ds}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{dm}\times d.\frac{\lambda\,dy}{ds}\right)^2 + \left(Z - \frac{1}{dm}\times d.\frac{\lambda\,dz}{ds}\right)^2\right)}$$

On appliquera enſuite les mêmes raiſonnemens à la partie de l'équation générale qui eſt hors du ſigne S, & l'on en tirera des concluſions analogues.

42. Juſqu'ici nous avons ſuppoſé que le fil étoit inextenſible; regardons-le maintenant comme un reſſort capable d'extenſion & de contraction; & ſoit F la force avec laquelle chaque élément ds de la courbe du fil tend à ſe contracter, on aura, comme dans l'art. 18 (en mettant ds à la place de f, & en changeant d en δ), $F\delta ds$ pour le moment de cette force, & $SF\delta ds$ pour la ſomme des momens de

toutes les forces de contraction qui agiſſent ſur toute la longueur du fil. On ajoutera donc cette intégrale $SF\delta ds$ à l'intégrale $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ qui exprime la ſomme des momens de toutes les forces extérieures qui agiſſent ſur le fil (art. 29), & égalant le tout à zéro, on aura l'équation générale de l'équilibre du fil à reſſort.

Or il eſt viſible que cette équation ſera de la même forme que celle de l'art. 30 pour le cas d'un fil inextenſible, & qu'en y changeant F en λ, les deux équations deviendront même identiques. On aura donc dans le cas préſent les mêmes équations particulieres pour l'équilibre du fil qu'on a trouvées dans le cas de l'article 31, en mettant ſeulement dans celle-ci F à la place de λ. Or comme la quantité F eſt ſuppoſée connue, on n'aura pas beſoin de l'éliminer; c'eſt pourquoi on aura ici une équation de plus pour l'équilibre du fil que dans le cas cité; mais comme d'ailleurs l'élimination eſt toujours permiſe, il s'enſuit que les équations réſultantes de cette élimination, auront également lieu pour un fil inextenſible, comme pour un fil extenſible & à reſſort.

On peut conclure de-là que la quantité indéterminée λ de la ſolution de l'article 31, n'exprime proprement autre choſe que la force avec laquelle chaque élément du fil réſiſte à être allongé par l'action des forces extérieures; c'eſt-à-dire, ce qu'on nomme communément la tenſion du fil. C'eſt auſſi ce qu'on auroit pu trouver directement par la théorie de l'article 7 de la Section précédente, ainſi que nous l'avons fait à l'égard de la preſſion exercée par le fil ſur une ſurface (art. précéd.).

43. Suppoſons de nouveau le fil inextenſible, mais au lieu

de le ſuppoſer en même-tems parfaitement flexible, comme on l'a fait juſqu'ici, ſuppoſons-le élaſtique, enſorte qu'il y ait dans chaque point une force que j'appellerai E, qui s'oppoſe à l'inflexion du fil, & qui tende par conſéquent à diminuer l'angle de contingence. Nommant cet angle e, on aura, comme dans l'article 26 (en changeant ſeulement d en δ), $E\delta e$ pour le moment de chaque force E; donc $SE\delta e$ ſera la ſomme des momens de toutes les forces d'élaſticité qui agiſſent dans toute la longueur du fil, laquelle devra donc être ajoutée au premier membre de l'équation générale de l'équilibre dans le cas d'un fil inextenſible & parfaitement flexible (art. 30).

Toute la difficulté conſiſte donc à ramener l'intégrale $SE\delta e$ à la forme convenable; pour cela il faut commencer par chercher la valeur de e; or nous avons trouvé plus haut (art. 26), coſ. $e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$, d'où l'on tire

$$\text{ſin } e^2 = \frac{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2g^2};$$

pour appliquer cette formule au cas préſent, il ſuffit de remarquer que les coordonnées $x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''$ par leſquelles nous avons exprimé les quantités f, g, h (art. 11 & 20), deviennent ici x, y, z; $x + dx, y + dy, z + dz$; $x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z$; enſorte qu'on aura $f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, $g^2 = (dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2$ $= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)$ $+ d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = ds^2 + 2dsd^2s + d^2x^2 + d^2y^2$ $+ d^2z^2$, $h^2 = (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$

$= 4ds^2 + 4ds\,d^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$; donc $f^2 + g^2 - h^2 = -2ds^2 - 2ds\,d^2s$; & $4f^2g^2 - (f^2+g^2-h^2)^2 = 4ds^4 + 8ds^3d^2s + 4ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 4(ds^2 + ds\,d^2s)^2 = 4ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)$. Donc enfin on aura

$$\text{ſin}\, e^2 = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2}.$$

Comme cette valeur de ſin e^2 eſt infiniment petite du ſecond ordre, il s'enſuit que ſin e, & par conſéquent auſſi l'angle e ſera infiniment petit du premier ordre; de ſorte qu'on aura

$$e = \frac{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}{ds};$$

c'eſt l'expreſſion de l'angle de contingence e dans une courbe quelconque à double courbure.

44. On différenciera maintenant ſuivant δ, pour avoir la valeur de δe, & comme par la condition de l'inextenſibilité du fil on a déja $\delta ds = 0$ (art. 21), & par conſéquent auſſi $d\delta ds = \delta d^2 s = 0$, on pourra traiter dans la différenciation dont il s'agit, ds & d^2s comme conſtantes, ainſi l'on aura

$$\delta e = \frac{d^2x\,\delta d^2x + d^2y\,\delta d^2y + d^2z\,\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}};$$

ſubſtituant dans $SE\delta e$, & faiſant pour abréger

$$I = \frac{E}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}},$$

on aura donc

$$SE\delta e = SI d^2x\,\delta d^2x + SI d^2y\,\delta d^2y + SI d^2z\,\delta d^2z,$$

Ces expreſſions étant traitées ſuivant les regles données dans l'article 17 de la Section quatrieme, en y changeant d'abord δd en $d\delta$, & intégrant enſuite par parties pour faire diſparoître le d avant δ, on aura les transformées ſuivantes,

$$SId^2x\,\delta d^2x = I''d^2x''d\delta x'' - d.(I''d^2x'')\delta x''$$
$$- I'd^2x'd\delta x' + d.(I'd^2x')\delta x' + Sd^2.(Id^2x)\delta x,$$
$$SId^2y\,\delta d^2y = I''d^2y''d\delta y'' - d.(I''d^2y'')\delta y''$$
$$- I'd^2y'd\delta y' + d.(I'd^2y')\delta y' + Sd^2.(Id^2y)\delta y,$$
$$SId^2z\,\delta d^2z = I''d^2z''d\delta z'' - d.(I''d^2z'')\delta z''$$
$$- I'd^2z'd\delta z' + d.(I'd^2z')\delta z' + Sd^2.(Id^2z)\delta z.$$

On ajoutera donc ces différens termes à ceux qui forment le premier membre de l'équation générale de l'équilibre de l'article 30, & l'on aura l'équation de l'équilibre d'un fil inextenſible & élaſtique.

45. Égalant d'abord à zéro les coëfficients des variations δx, δy, δz qui ſe trouvent ſous le ſigne S, on aura ces trois équations indéfinies

$$X\,dm - d.\frac{\lambda dx}{ds} + d^2.(Id^2x) = 0$$
$$Y\,dm - d.\frac{\lambda dy}{ds} + d^2.(Id^2y) = 0$$
$$Z\,dm - d.\frac{\lambda dz}{ds} + d^2.(Id^2z) = 0,$$

d'où il faudra éliminer l'indéterminée λ, ce qui les réduira à deux, qui ſuffiront pour déterminer la courbe du fil.

Une premiere intégration donne

$$\frac{\lambda dx}{ds} - d.(I d^2 x) = A + \int X dm$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} - d.(I d^2 y) = B + \int Y dm$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} - d.(I d^2 z) = C + \int Z dm;$$

A, B, C étant des constantes arbitraires, & l'élimination de λ donnera

$$dx\,d.(I d^2 y) - dy\,d.(I d^2 x) = (A + \int X dm)\,dy - (B + \int Y dm)\,dx$$

$$dx\,d.(I d^2 z) - dz\,d.(I d^2 x) = (A + \int X dm)\,dz - (C + \int Z dm)\,dx$$

$$dy\,d.(I d^2 z) - dz\,d.(I d^2 y) = (B + \int Y dm)\,dz - (C + \int Z dm)\,dy,$$

dont la derniere est déja contenue dans les deux autres.

Ces équations sont de nouveau intégrables, & l'on aura

$$I(dx\,d^2 y - dy\,d^2 x) = F + \int (A + \int X dm)\,dy - \int (B + \int Y dm)\,dx,$$

$$I(dx\,d^2 z - dz\,d^2 x) = G + \int (A + \int X dm)\,dz - \int (C + \int Z dm)\,dx,$$

$$I(dy\,d^2 z - dz\,d^2 y) = H + \int (B + \int Y dm)\,dz - \int (C + \int Z dm)\,dy,$$

F, G, H étant de nouvelles constantes.

Or nous avons supposé plus haut (article 44), $I = \frac{E}{ds\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2}}$; le carré du dénominateur de cette quantité est $ds^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - ds^2 d^2 s^2$ $= (dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2)$ $- (dx\,d^2 x + dy\,d^2 y + dz\,d^2 z)^2 = (dx\,d^2 y - dy\,d^2 x)^2$ $+ (dx\,d^2 z - dz\,d^2 x)^2 + (dy\,d^2 z - dz\,d^2 y)^2$. Donc si on ajoute ensemble les carrés des trois équations précédentes, on aura celle-ci, sans différentielles,

$$E^2 = (F + \int (A + \int X dm)\,dy - \int (B + \int Y dm)\,dx)^2$$
$$+ (G + \int (A + \int X dm)\,dz - \int (C + \int Z dm)\,dx)^2$$
$$+ (H + \int (B + \int Y dm)\,dz - \int (C + \int Z dm)\,dy)^2,$$

&

& si on divise ensemble deux des mêmes équations, on aura celle-ci où l'élasticité n'entre pas,

$$\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{G + \int(A + \int X\,dm)\,dz - \int(C + \int Z\,dm)\,dx}{F + \int(A + \int X\,dm)\,dy - \int(B + \int Y\,dm)\,dx}.$$

Ces deux équations sont ce qu'il y a de plus simple pour déterminer la courbe élastique, en ayant égard à la double courbure.

46. Considérons maintenant les termes de l'équation générale qui sont hors du signe S; ces termes sont

$$\left(\frac{\lambda'' dx''}{ds''} - d.(I'' d^2 x'')\right) \delta x'' + I'' d^2 x'' d\delta x''$$
$$+ \left(\frac{\lambda'' dy''}{ds''} - d.(I'' d^2 y'')\right) \delta y'' + I'' d^2 y'' d\delta y''$$
$$+ \left(\frac{\lambda'' dz''}{ds''} - d.(I'' d^2 z'')\right) \delta z'' + I'' d^2 z'' d\delta z''$$
$$- \left(\frac{\lambda' dx'}{ds'} - d.(I' d^2 x')\right) \delta x' - I' d^2 x' d\delta x'$$
$$- \left(\frac{\lambda' dy'}{ds'} - d.(I' d^2 y')\right) \delta y' - I' d^2 y' d\delta y'$$
$$- \left(\frac{\lambda' dz'}{ds'} - d.(I' d^2 z')\right) \delta z' - I' d^2 z' d\delta z';$$

& il faudra les faire disparoître indépendamment des valeurs de $\delta x''$, $\delta y''$, &c.

Donc, 1°, si le fil est entiérement libre, il faudra que les coëfficiens des douze quantités $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z''$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$ soient chacun nul en particulier.

Or d'après les premieres équations intégrales de l'article 45, on voit qu'en faisant commencer les intégrations au premier point du fil, les coëfficiens de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, sont

égaux à A, B, C, & ceux de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ deviennent $A + SXdm$, $B + SYdm$, $C + SZdm$. Ainsi il faudra que l'on ait dans le cas dont il s'agit $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, & $SXdm = 0$, $SYdm = 0$, $SZdm = 0$.

Ensuite il faudra que l'on ait aussi $I''d^2x'' = 0$, $I''d^2y'' = 0$, $I''d^2z'' = 0$, & $I'd^2x' = 0$, $I'd^2y' = 0$, $I'd^2z' = 0$, pour faire disparoître les termes affectés de $d\delta x''$, $d\delta y''$, &c; & il est clair que les secondes équations intégrales du même article donneront $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$; & $S(\int Xdm.dy - \int Ydm.dx) = 0$, $S(\int Xdm.dz - \int Zdm.dx) = 0$, $S(\int Ydm.dz - \int Zdm.dy) = 0$.

2°. Si la premiere extrémité du fil est fixe, alors $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$; par conséquent A, B, C ne seront pas nuls; mais la condition que les coëfficiens de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ soient nuls, donnera $A = -SXdm$, $B = -SYdm$, $C = -SZdm$; & si la position de la tangente à cette extrémité étoit donnée aussi, on auroit de plus $d\delta x' = 0$, $d\delta y' = 0$, $d\delta z' = 0$, par conséquent F, G, H ne seroient pas nuls, mais la nullité des coëfficiens de $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z''$ donneroit $F = S((B + \int Ydm)dx - (A + \int Xdm)dy)$ $G = S((C + \int Zdm)dx - (A + \int Xdm)dz)$, $H = S((C + \int Zdm)dy - (B + \int Ydm)dz)$, On raisonnera de la même maniere par rapport à l'état de la seconde extrémité du fil.

3°. Enfin, si outre les forces qui agissent sur tous les points du fil, il y en avoit de particulieres X', Y', Z', X'', Y'', Z'', appliquées à l'une & à l'autre extrémité, il n'y auroit qu'à ajouter aux termes ci-dessus les suivans,

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'',$$

& s'il y avoit de plus d'autres conditions relatives à l'état de

ces extrémités, on opéreroit toujours de la même façon & d'après les mêmes principes.

47. Si on vouloit que le fil fût doublement élaſtique, tant à l'égard de l'extenſibilité, qu'à l'égard de la flexibilité, alors on auroit dans l'équation générale de l'équilibre, à la place du terme $S\lambda d\delta s$, celui-ci $SFd\delta s$, c'eſt-à-dire, ſimplement F à la place de λ, en nommant F la force d'élaſticité qui réſiſte à l'extenſion du fil (art. 42). Mais il faudroit de plus, dans ce cas, regarder ds comme variable dans l'expreſſion de δe; par conſéquent il faudroit ajouter à la valeur de δe de l'article 44, ces deux termes, dans leſquels je fais, pour abréger, $\sqrt{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)}=\sigma$, $-\frac{\sigma\delta ds}{ds^2}-\frac{de^2\delta d^2s}{\sigma ds}$; donc on ajouteroit à la valeur de $SE\delta e$ du même article les termes $-S\frac{E\sigma}{ds^2}\delta ds-S\frac{Ed^2s}{\sigma ds}\delta d^2s$; ce dernier ſe réduit d'abord (article 17, Section 4) à $-\frac{E''d^2s''}{\sigma''ds''}d\delta s''+\frac{E'd^2s'}{\sigma'ds'}d\delta s'+Sd.\frac{Ed^2s}{\sigma ds}.\delta ds$; donc il faudra ajouter à la valeur de $SE\delta e$ les termes $-\frac{E''d^2s''}{\sigma''ds''}d\delta s''$ $+\frac{E'd^2s'}{\sigma'ds'}d\delta s'+S\left(d.\frac{Ed^2s}{\sigma ds}-\frac{E\sigma}{ds^2}\right)\delta ds$. Le dernier terme de cette expreſſion étant analogue au terme $SF\delta ds$ ſera ſuſceptible de réductions ſemblables; à l'égard des deux autres il n'y aura qu'à y ſubſtituer pour $d\delta s$ ſa valeur $\frac{dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z}{ds}$, en marquant toutes les lettres d'un trait ou de deux.

De-là il eſt facile de conclure qu'on aura pour la ſolution du cas préſent, les mêmes formules que dans les articles

31 & 32, en y mettant seulement $F + d. \frac{E d^2 s}{\sigma d s} - \frac{E \sigma}{d s^2}$ à la place de λ; & ajoutant aux coëfficiens de $d \delta x''$, $d \delta y''$, $d \delta z''$, $d \delta x'$, $d \delta y'$, $d \delta z'$, les quantités $\omega'' dx''$, $\omega'' dy''$, $\omega'' dz''$, $\omega' dx'$, $\omega' dy'$, $\omega' dz'$, ω étant $= - \frac{E d^2 s}{\sigma d s^2}$.

48. Venons enfin au cas d'un fil inextensible & inflexible; on aura ici pour la somme des momens des forces la même formule intégrale que dans le cas de l'article 30, c'est-à-dire, $S(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm$; ensuite la condition de l'inextensibilité du fil donnera comme dans le même article, $\delta ds = 0$; & celle de l'inflexibilité donnera $\delta e = 0$, puisque l'angle de contingence doit être invariable; mais ces deux conditions ne suffisent pas encore dans le cas où la courbe est à double courbure, comme on va le voir.

49. Pour traiter la question de la maniere la plus simple & la plus directe, je remarque que tout consiste à faire ensorte que les différens points de la courbe du fil conservent toujours entr'eux les mêmes distances: or en considérant plusieurs points successifs, dont les coordonnées soient x, y, z, $x + dx, y + dy, z + dz, x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z$, &c. Il est clair que les carrés des distances entre le premier de ces points & les suivans seront exprimés par les quantités $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $(2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$, $(3dx + 3d^2x + d^3x)^2 + (3dy + 3d^2y + d^3y)^2 + (3dz + 3d^2z + d^3z)^2$; &c.

Supposons, pour abréger, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha$, $d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \beta$, $d^3x^2 + d^3y^2 + d^4z^2 = \gamma$; &c, les quantités précédentes étant développées, deviendront α, $4\alpha + 2d\alpha + \beta$,

$9\alpha + 9d\alpha + 9\beta + 3(d^2\alpha - 2\beta) + 3d\beta + \gamma$, &c.

Il faudra donc que les variations de ces quantités soient nulles dans toute l'étendue de la courbe, ce qui donnera ces équations indéfinies,

$\delta\alpha = 0$, $4\delta\alpha + 2\delta d\alpha + \delta\beta = 0$, $9\delta\alpha + 9\delta d\alpha + 3\delta\beta + 3\delta d^2\alpha + 3\delta\beta + \delta\gamma = 0$, &c; mais $\delta\alpha$ étant $= 0$, on a aussi $d\delta\alpha = \delta d\alpha = 0$; donc $\delta\beta = 0$; de-là on aura de plus $d^2\delta\alpha = \delta d^2\alpha = 0$, $d\delta\beta = \delta d\beta = 0$; donc $\delta\gamma = 0$; & ainsi de suite. De sorte que les équations de condition pour l'inextensibilité & l'inflexibilité du fil seront $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, &c, c'est-à-dire, en différentiant & changeant δd en $d\delta$,

$$dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z = 0$$
$$d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z = 0$$
$$d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z = 0,$$

&c.

Il est clair qu'il suffit de trois de ces équations pour déterminer les trois variations δx, δy, δz, d'où l'on peut d'abord conclure que dès qu'on aura satisfait aux trois premieres, toutes les autres qu'on pourroit trouver à l'infini, auront lieu d'elles-mêmes; c'est aussi de quoi on peut se convaincre par le calcul même, comme on le verra plus bas (art. 55).

50. On aura donc par notre méthode cette équation générale de l'équilibre,

$$0 = S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dm + S\lambda(dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z)$$
$$+ S\mu(d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z) + S\nu(d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z)$$

laquelle par les transformations enseignées se réduira à la forme suivante,

$$\begin{aligned}
0 = & \, S(X dm - d.(\lambda dx) + d^2.(\mu d^2 x) - d^3.(\nu d^3 x))\,\delta x \\
& + S(Y dm - d.(\lambda dy) + d^2.(\mu d^2 y) - d^3.(\nu d^3 y))\,\delta y \\
& + S(Z dm - d.(\lambda dz) + d^2.(\mu d^2 z) - d^3.(\nu d^3 z))\,\delta z \\
& + (\lambda'' dx'' - d.(\mu'' d^2 x'') + d^2.(\nu'' d^3 x''))\,\delta x'' \\
& + (\mu'' d^2 x'' - d.(\nu'' d^3 x''))\,d\delta x'' + \nu'' d^3 x'' d^2 \delta x'' \\
& + (\lambda'' dy'' - d.(\mu'' d^2 y'') + d^2 (\nu'' d^3 y''))\,\delta y'' \\
& + (\mu'' d^2 y'' - d.(\nu'' d^3 y''))\,d\delta y'' + \nu'' d^3 y'' d^2 \delta y'' \\
& + (\lambda'' dz'' - d.(\mu'' d^2 z'') + d^2 (\nu'' d^3 z''))\,\delta z'' \\
& + (\mu'' d^2 z'' - d.(\nu'' d^3 z''))\,d\delta z'' + \nu'' d^3 z'' d^2 \delta z'' \\
& - (\lambda' dx' - d.(\mu' d^2 x') + d^2.(\nu' d^3 x'))\,\delta x' \\
& - (\mu' d^2 x' - d.(\nu' d^3 x'))\,d\delta x' - \nu' d^3 x' d^2 \delta x' \\
& - (\lambda' dy' - d.(\mu' d^2 y') + d^2.(\nu' d^3 y'))\,\delta y' \\
& - (\mu' d^2 y' - d.(\nu' d^3 y'))\,d\delta y' - \nu' d^3 y' d^2 \delta y' \\
& - (\lambda' dz' - d.(\mu' d^2 z') + d^2.(\nu' d^3 z'))\,\delta z' \\
& - (\mu' d^2 z' - d.(\nu' d^3 z'))\,d\delta z' - \nu' d^3 z' d^2 \delta z'.
\end{aligned}$$

51. Egalant d'abord à zéro les coëfficiens de δx, δy, δz sous le signe S, on aura ces trois équations indéfinies,

$$X dm - d.(\lambda dx) + d^2.(\mu d^2 x) - d^3.(\nu d^3 x) = 0$$
$$Y dm - d.(\lambda dy) + d^2.(\mu d^2 y) - d^3.(\nu d^3 y) = 0$$
$$Z dm - d.(\lambda dz) + d^2.(\mu d^2 z) - d^3.(\nu d^3 z) = 0,$$

lesquelles renfermant trois variables indéterminées, λ, μ, ν, ne serviront qu'à déterminer ces trois quantités; ensorte qu'il n'y aura aucune équation indéfinie entre les différentes

forces X, Y, Z qu'on ſuppoſe appliquées à tous les points de la verge.

Pour déterminer les quantités dont il s'agit, il eſt clair qu'il faut intégrer les équations précédentes; or c'eſt ce qui eſt facile, & l'on aura ces trois-ci,

$$\int X\,dm - \lambda\,dx + d.(\mu\,d^2x) - d^2.(\nu\,d^3x) = A$$
$$\int Y\,dm - \lambda\,dy + d.(\mu\,d^2y) - d^2.(\nu\,d^3y) = B$$
$$\int Z\,dm - \lambda\,dz + d.(\mu\,d^2z) - d^2.(\nu\,d^3z) = C,$$

A, B, C étant trois conſtantes arbitraires.

Je remarque de plus, que ſi on multiplie la premiere par dy ou dz, & qu'on en retranche la ſeconde ou la troiſieme multipliée par dx, pour éliminer λ de ces trois équations, on aura celles-ci,

$$dy\int X\,dm - dx\int Y\,dm + dy\,d.(\mu\,d^2x) - dx\,d.(\mu\,d^2y)$$
$$- dy\,d^2.(\nu\,d^3x) + dx\,d^2.(\nu\,d^3y) = A\,dy - B\,dx,$$
$$dz\int X\,dm - dx\int Z\,dm + dz\,d.(\mu\,d^2x) - dx\,d.(\mu\,d^2z)$$
$$- dz\,d^2.(\nu\,d^3x) + dx\,d^2.(\nu\,d^3z) = A\,dz - C\,dx,$$
$$dz\int Y\,dm - dy\int Z\,dm + dz\,d.(\mu\,d^2y) - dy\,d.(\mu\,d^2z)$$
$$- dz\,d^2.(\nu\,d^3y) + dy\,d^2.(\nu\,d^3z) = B\,dz - C\,dy,$$

leſquelles ſont auſſi intégrables, & dont les intégrales ſont

$$y\int X\,dm - x\int Y\,dm - \int (Xy - Yx)\,dm$$
$$+ \mu(dy\,d^2x - dx\,d^2y) - dy\,d.(\nu\,d^3x) + dx\,d.(\nu\,d^3y)$$
$$+ \nu(d^2y\,d^3x - d^2x\,d^3y) = Ay - Bx + F,$$
$$z\int X\,dm - x\int Z\,dm - \int (Xz - Zx)\,dm$$
$$+ \mu(dz\,d^2x - dx\,d^2z) - dz\,d.(\nu\,d^3x) + dx\,d.(\nu\,d^3z)$$

$$+\nu(d^2 z\, d^3 x - d^2 x\, d^3 z) = Az - Cx + G,$$

$$z\int Y dm - y\int Z dm - \int(Yz - Zy)dm$$
$$+\mu(dz\, d^2 y - dy\, d^2 z) - dz\, d.(\nu\, d^3 y) + dy\, d.(\nu\, d^3 z)$$
$$+\nu(d^2 z\, d^3 y - d^2 y\, d^3 z) = Bz - Cy + H,$$

F, G, H étant de nouvelles conſtantes arbitraires.

Ces trois dernieres équations ſerviront à déterminer les trois quantités μ, ν & $d\nu$; & les trois premieres équations intégrales donneront les valeurs de λ, $d\mu$, $d^2\nu$. Ainſi on aura toutes les inconnues qui entrent dans les termes de l'équation générale (art. préc.) qui ſont hors du ſigne S; il ſuffira pour cela de marquer dans les ſix équations qu'on vient de trouver, toutes les lettres d'un trait, ou de deux, à l'exception des conſtantes arbitraires, en ſuppoſant nulles dans le premier cas les quantités affectées du ſigne $\int$, leſquelles ſont cenſées commencer au premier point du fil, & changeant dans le ſecond cas, $\int$ en S dans les mêmes quantités, pour les rapporter au dernier point du fil.

52. Cela poſé, voyons maintenant les conditions qui peuvent réſulter de l'anéantiſſement des termes hors du ſigne S dans l'équation générale de l'équilibre (art. 50).

Et d'abord ſi on ſuppoſe la verge entiérement libre, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$, $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$, & $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, &c, ſeront toutes indéterminées; par conſéquent il faudra égaler à zéro chacun de leurs coëfficiens; & il eſt viſible qu'il faudra pour cela que les quantités λ', μ', ν', $d\mu'$, $d\nu'$, $d^2\nu'$, ainſi que λ'', μ'', ν'', $d\mu''$, $d\nu''$, $d^2\nu''$ ſoient toutes nulles.

Donc les trois premieres équations intégrales de l'article précédent,

précédent, donneront ces ſix conditions, $o = A$, $o = B$, $o = C$, $SXdm = A$, $SYdm$, $SZdm = C$.

Et les trois dernieres donneront celles-ci,

$$o = Ay' - Bx' + F,\ o = Az' - Cx' + G,\ o = Bz' - Cy' + H,\ y''SXdm - x''SYdm - S(Xy - Yx)dm = Ay'' - Bx'' + F,\ z''SXdm - x''SZdm - S(Xz - Zx)dm = Az'' - Cx'' + G,\ z''SYdm - y''SZdm - S(Yz - Zy)dm = Bz'' - Cy'' + H.$$

Donc $A = o$, $B = o$, $C = o$, $F = o$, $G = o$, $H - o$; & par conſéquent

$$SXdm = o,\ SYdm = o,\ SZdm = o,$$
$$S(Xy - Yx)dm = o,\ S(Xz - Zx)dm = o,\ S(Yz - Zy)dm = o.$$

Ces ſix conditions ſont donc les ſeules qui ſoient néceſſaires pour l'équilibre d'une verge inflexible lorſqu'il n'y a pas de point fixe; c'eſt ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit plus haut (art. 25), & c'eſt auſſi ce qu'on auroit pu déduire immédiatement de la théorie donnée dans la Section troiſieme, ainſi que nous l'avons remarqué dans l'article cité.

53. Suppoſons maintenant qu'il y ait dans la verge un point fixe, & que ce point ſoit la premiere extrémité de la verge; dans ce cas on aura $\delta x' = o$, $\delta y' = o$, $\delta z' = o$; enſorte que les termes affectés de ces variations diſparoîtront d'eux-mêmes; il ſuffira donc d'égaler à zéro les coëfficiens de $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$, $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$, ainſi que les coëfficiens de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, &c.

Or il eſt aiſé de voir que pour cela il ſuffira que l'on

ait $\mu' = 0$, $\nu' = 0$, $d\nu' = 0$; & ensuite $\lambda'' = 0$, $\mu'' = 0$, $\nu'' = 0$, $d\mu'' = 0$, $d\nu'' = 0$, $d^2\nu'' = 0$, comme dans le cas précédent; & l'on trouvera les mêmes conditions que dans l'article précédent, à l'exception de ce que A, B, C ne seront pas nulles.

On aura donc $A = SXdm$, $B = SYdm$, $C = SZdm$, ensuite $F = Bx' - Ay'$, $G = Cx' - Az'$, $H = Cy' - Bz'$, & les trois dernieres équations se réduiront à celles-ci,

$-S(Xy - Yx)dm = Bx' - Ay'$, $-S(Xz - Zx)dm = Cx' - Az'$, $-S(Yz - Zy)dm = Cy' - Bz'$; c'est-à-dire, à $S(Xy - Yx)dm + x'SYdm - y'SXdm = 0$, $S(Xz - Zx)dm + x'SZdm - z'SXdm = 0$, $S(Yz - Zy)dm + y'SZdm - z'SYdm = 0$; ou ce qui est la même chose, à

$$S(X(y - y') - Y(x - x'))dm = 0,$$
$$S(X(z - z') - Z(x - x'))dm = 0,$$
$$S(Y(z - z') - Z(y - y'))dm = 0.$$

Ce sont les seules conditions nécessaires pour l'équilibre, & il est clair qu'elles répondent à celles que l'on a trouvées dans l'article 24.

54. Si la verge étoit fixement attachée par sa premiere extrémité, ensorte que non-seulement le premier point de la courbe fût fixe, mais aussi la tangente à ce premier point, alors on auroit non-seulement $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$, mais aussi $\delta dx' = d\delta x' = 0$, $\delta dy' = d\delta y' = 0$, $\delta dz' = d\delta z' = 0$; par conséquent tous les termes affectés de ces quantités disparoîtroient d'eux-mêmes, & il ne resteroit qu'à faire

évanouir les termes affectés de $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$, & de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, &c.

On n'aura donc dans ce cas que ces conditions

$$' = 0,\ \lambda'' = 0,\ \mu'' = 0,\ \nu' = 0,\ d\mu'' = 0,\ d\nu'' = 0,\ d^2\nu'' = 0.$$

Donc les constantes A, B, C auront encore les valeurs $A = S\,X\,dm$, $B = S\,Y\,dm$, $C = S\,Z\,dm$; ensuite les trois dernieres équations de l'art. 51 étant appliquées au dernier point de la verge, donneront $F = S\,(Yx - Xy)\,dm$, $G = S\,(Zx - Xz)\,dm$, $H = S\,(Zy - Yz)\,dm$. Et si on applique ces mêmes équations au premier point, on aura

$$\mu'(dy'\,ddx' - dx'\,ddy') - d\nu'(dy'\,d^3x' - dx'\,d^3y') = Ay' - Bx' + F$$
$$\mu'(dz'\,ddx' - dx'\,ddz') - d\nu'(dz'\,d^3x' - dx'\,d^3z') = Az' - Cx' + G$$
$$\mu'(dz'\,ddy' - dy'\,ddz') - d\nu'(dz'\,d^3y' - dy'\,d^3z') = Bz' - Cy' + H,$$

d'où éliminant μ' & $d\nu'$, résulte cette condition de l'équilibre

$$A(y'dz' - z'dy') + B(z'dx' - x'dz') + C(x'dy' - y'dx')$$
$$+ F\,dz' - G\,dy' + H\,dx' = 0.$$

Voyez ci-dessous un cas semblable, art. 59.

On pourroit résoudre de la même maniere tous les autres cas, & particuliérement celui d'un corps de figure quelconque. Mais cette derniere question mérite d'être examinée avec plus de soin, & par une méthode plus simple que la précédente.

§. IV.

De l'équilibre d'un corps solide de grandeur sensible & de figure quelconque, dont tous les points sont tirés par des forces quelconques.

55. Puisque la condition de la solidité du corps consiste en ce que tous ses points conservent constamment entr'eux la même position & les mêmes distances, on aura entre les variations δx, δy, δz, les mêmes équations de condition qu'on a trouvées dans l'article 49; ainsi on pourra, par leur moyen, déterminer immédiatement les valeurs de ces variations. Pour cela je remarque que comme en passant aux différences secondes, il est toujours permis de prendre une des différences premieres pour constante, on peut supposer dx constante, & par conséquent $d^2 x = 0$, $d^3 x = 0$, &c; moyennant quoi la seconde & la troisieme équation de l'article cité, deviendront

$$d^2 y d^2 \delta y + d^2 z d^2 \delta z = 0, \ \& \ d^3 y d^3 \delta y + d^3 z d^3 \delta z = 0.$$

La premiere de ces équations donne d'abord

$d^2 \delta y = -\frac{d^2 z}{d^2 y} d^2 \delta z$, & différentiant

$$d^3 \delta y = -\frac{d^2 z}{d^2 y} d^3 \delta z - \left(\frac{d^3 z}{d^2 y} - \frac{d^2 z d^3 y}{d^2 y^2}\right) d^2 \delta z;$$

cette valeur étant substituée dans la seconde équation, elle se trouvera toute divisible par $d^3 z - \frac{d^3 y d^2 z}{d^2 y}$, & on aura après la division $d^3 \delta z - \frac{d^3 y}{d^2 y} d^2 \delta z = 0$; d'où l'on tire, en intégrant $d^2 \delta z = \delta L d^2 y$, δL étant une constante. Ayant

$d^2 \delta z$ on trouvera $d^2 \delta y = - \delta L d^2 z$; donc intégrant de nouveau, & ajoutant les conſtantes $- \delta M dx$, $\delta N dx$, on aura $d \delta z = \delta L dy - \delta M dx$, $d \delta y = - \delta L dz + \delta N dx$; & ces valeurs étant enſuite ſubſtituées dans la premiere équation de condition, ſavoir $dx d \delta x + dy d \delta y + dz d \delta z = 0$, il viendra $d \delta x = - \delta N dy + \delta M dz$.

Enfin on aura par une troiſieme intégration, & par l'addition des nouvelles conſtantes $\delta \lambda$, $\delta \mu$, $\delta \nu$,

$$\delta x = \delta \lambda - y \delta N + z \delta M$$
$$\delta y = \delta \mu + x \delta N - z \delta L$$
$$\delta z = \delta \nu - x \delta M + y \delta L.$$

Et il eſt facile de ſe convaincre que ces expreſſions ne ſatisfont pas ſeulement aux trois premieres équations de condition de l'article 49, mais auſſi à toutes les autres qu'on pourroit trouver à l'infini, & qui ſont toutes renfermées dans cette équation générale $d^n x d^n \delta x + d^n y d^n \delta y + d^n z d^n \delta z = 0$.

Telles ſont donc les valeurs de δx, δy, δz pour un ſyſtême quelconque de points unis enſemble, de maniere qu'ils conſervent toujours entr'eux les mêmes diſtances; ainſi ces valeurs ſerviront non-ſeulement pour le cas d'une courbe quelconque mobile & invariable dans ſa figure, mais auſſi pour le cas d'un corps ſolide de figure quelconque.

56. Puis donc que les valeurs précédentes de δx, δy, δz ſatisfont déja aux équations de condition du problême, il eſt clair qu'il ſuffira de les ſubſtituer dans la formule $S(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm$, & faire enſorte qu'elle devienne nulle, indépendamment des quantités $\delta \lambda$, $\delta \mu$, $\delta \nu$,

δL, δM, δN qui ſont les ſeules indéterminées qui reſtent.

Or comme ces quantités ſont les mêmes pour tous les points du corps, il faudra dans la ſubſtitution les faire ſortir hors du ſigne S; & l'on aura conſéquemment cette équation générale de l'équilibre d'un corps ſolide de figure quelconque.

$$\begin{aligned}&\delta\lambda\, S X dm + \delta\mu\, S Y dm + \delta\nu\, S Z\, dm \\ &+ \delta N S(Yx - Xy)dm + \delta M S(Xz - Zx)dm \\ &+ \delta L\, S(Zy - Yz)\, dm = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on tirera les équations particulieres de l'équilibre, en ayant égard aux conditions du problême.

57. Et d'abord ſi le corps eſt ſuppoſé entiérement libre, les ſix variations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, δL, δM, δN, ſeront toutes indéterminées, & il faudra égaler ſéparément à zéro les quantités par où elles ſe trouvent multipliées; ce qui donnera ces ſix équations déja connues,

$$SXdm = 0,\ SYdm = 0,\ SZdm = 0$$

$$S(Yx - Xy)\, dm = 0, S(Xz - Zx)\, dm = 0, S(Zy - Yz)dm = 0.$$

58. En ſecond lieu, s'il y a dans le corps un point fixe autour duquel il ait ſimplement la liberté de pouvoir pirouetter en tout ſens, & qu'on nomme a, b, c les valeurs des coordonnées x, y, z pour ce point; il faudra que l'on ait $\delta a = 0$, $\delta b = 0$, $\delta c = 0$; donc $\delta\lambda - b\delta N + c\delta M = 0$, $\delta\mu + a\delta N - c\delta L = 0$, $\delta\nu - a\delta M + b\delta L = 0$; d'où l'on tire

$$\delta\lambda = b\delta N - c\delta M,$$
$$\delta\mu = c\delta L - a\delta N,$$
$$\delta\nu = a\delta M - b\delta L.$$

Qu'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation générale de l'article précédent, & mettant ſous le ſigne S les quantités a, b, c qui ſont conſtantes par rapport aux différens points du corps, on aura cette transformée,

$$\delta N S(Y(x-a) - X(y-b))dm +$$
$$\delta M S(X(z-c) - Z(x-a))dm +$$
$$\delta L S(Z(y-b) - Y(z-c))dm = 0,$$

laquelle ne fournira donc plus que trois équations, ſavoir,

$$S(Y(x-a) - X(y-b))dm = 0$$
$$S(X(z-c) - Z(x-a))dm = 0$$
$$S(Z(y-b) - Y(z-c))dm = 0.$$

59. En troiſieme lieu s'il y a dans le corps deux points fixes, & que f, g, h ſoient les valeurs de x, y, z pour le ſecond de ces points, on aura de plus

$$\delta\lambda = g\delta N - h\delta M$$
$$\delta\mu = h\delta L - f\delta N$$
$$\delta\nu = f\delta M - g\delta L;$$

donc, comparant ces valeurs de $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ avec celles de l'article précédent, on aura

$$(g-b)\delta N - (h-c)\delta M = 0$$
$$(f-a)\delta N - (h-c)\delta L = 0$$
$$(f-a)\delta M - (g-b)\delta L = 0.$$

Les deux premieres de ces équations donnent

$$\delta L = \frac{f-a}{h-c}\,\delta N,\ \delta M = \frac{g-b}{h-c}\,\delta N,$$

& comme ces valeurs ſatisfont auſſi à la troiſieme équation, il s'enſuit que la variation δN demeure indéterminée.

Faiſant donc ces ſubſtitutions dans la transformée de l'article précédent, on aura

$$\delta N[(h-c)S(Y(x-a)-X(y-b))\,dm + (g-b)S(X(z-c)-Z(x-a))\,dm + (f-a)S(Z(y-b)-Y(z-c))\,dm] = 0;$$

ainſi les conditions de l'équilibre ſeront renfermées dans cette ſeule équation,

$$(h-c)S(Y(x-a)-X(y-b))\,dm + (g-b)S(X(z-c)-Z(x-a))\,dm + (f-a)S(Z(y-b)-Y(z-c))\,dm = 0.$$

60. En général ſi les deux points du corps que nous venons de ſuppoſer fixes ne l'étoient pas, mais qu'ils fuſſent mobiles ſur des lignes ou des ſurfaces données, ou même joints entr'eux d'une maniere quelconque, on auroit alors une ou pluſieurs équations différentielles entre les variations des coordonnées a, b, c, f, g, h qui répondent à ces points; & ſubſtituant à la place de ces variations leurs valeurs en $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, δL, δM, δN, d'après les formules générales de l'article 55, on auroit autant d'équations entre ces dernieres variations, au moyen deſquelles on détermineroit quelques-unes de ces variations par les autres, & ſubſtituant enſuite ces valeurs dans l'équation générale, on égaleroit à zéro chacun des coëfficiens des variations reſtantes;

ce

ce qui fournira toutes les équations néceſſaires pour l'équilibre.

La marche du calcul eſt, comme l'on voit, toujours la même; & c'eſt ce qu'on doit regarder comme un des principaux avantages de cette méthode.

61. Au reſte, les expreſſions trouvées plus-haut (art. 55), pour les variations δx, δy, δz font voir que ces variations ne ſont que les réſultats des mouvemens de tranſlation & de rotation, que nous avons conſidérés en général dans la Section troiſieme.

En effet, il eſt viſible que les termes $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ qui ſont communs à tous les points du corps, repréſentent les petits eſpaces parcourus par le corps, ſuivant les directions des coordonnées x, y, z, en vertu d'un mouvement quelconque de tranſlation; & on voit par les formules de l'article 3 de la même Section, que les termes $z\delta M - y\delta N$, $x\delta N - z\delta L$, $y\delta L - x\delta M$ repréſentent les petits eſpaces parcourus par chaque point du corps, ſuivant les mêmes directions, en vertu de trois mouvemens de rotation δL, δM, δN autour des trois axes des x, y, z; ces quantités δL, δM, δN répondant aux quantités $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ de l'article cité. Ainſi on auroit pu déduire immédiatement les expreſſions dont il s'agit de la ſeule conſidération de ces mouvemens, ce qui auroit été plus ſimple, mais non pas ſi direct. L'analyſe précédente conduit naturellement à ces expreſſions, & prouve par-là d'une maniere directe & générale, que lorſque les différens points d'un ſyſtême conſervent leur poſition reſpective; le ſyſtême ne peut avoir à chaque inſtant que des mouvemens de tranſlation dans l'eſpace, & de rotation autour de trois axes perpendiculaires entr'eux.

SIXIEME SECTION.

Sur les Principes de l'Hydroſtatique.

QUOIQUE nous ignorions la conſtitution intérieure des fluides, nous ne pouvons douter que les particules qui les compoſent ne ſoient matérielles, & que par cette raiſon les loix générales de l'équilibre ne leur conviennent comme aux corps ſolides. En effet, la propriété principale des fluides & la ſeule qui les diſtingue des corps ſolides, conſiſte en ce que toutes leurs parties cédent à la moindre force, & peuvent ſe mouvoir entr'elles avec toute la facilité poſſible, quelle que ſoit d'ailleurs la liaiſon & l'action mutuelle de ces parties. Or cette propriété pouvant aiſément être traduite en calcul, il s'enſuit que les loix de l'équilibre des fluides ne demandent pas une théorie particuliere, mais qu'elles ne doivent être qu'un cas particulier de la théorie générale de la Statique. C'eſt ſous ce point de vue que nous allons les conſidérer; mais nous croyons devoir commencer par expoſer en peu de mots les différens principes qui ont été employés juſqu'ici dans cette partie de la Statique, qu'on nomme communément Hydroſtatique.

Archimede eſt le plus ancien Auteur qui nous ait laiſſé quelques principes ſur l'équilibre des fluides. Son Traité *de Inſidentibus humido* n'a jamais été retrouvé en grec ; il y en avoit ſeulement une traduction latine aſſez défectueuſe, lorſque Commendin entreprit de le reſtituer & de l'éclaircir

par des notes; il parut par les ſoins de ce ſavant Commentateur en 1565, ſous le titre *de Iis quæ vehuntur in aquâ.*

Cet Ouvrage qu'on peut regarder comme un des plus précieux reſtes de l'antiquité, eſt diviſé en deux Livres. Dans le premier Archimede poſe ces deux principes, qu'il regarde comme des principes d'expérience, & ſur leſquels il fonde toute ſa théorie. 1°. Que la nature des fluides eſt telle que les parties moins preſſées ſont chaſſées par celles qui le ſont davantage, & que chaque partie eſt toujours preſſée par le poids de la colonne qui lui répond verticalement. 2°. Que tout ce qui eſt pouſſé en haut par un fluide, eſt toujours pouſſé ſuivant la perpendiculaire qui paſſe par ſon centre de gravité.

Du premier principe Archimede conclut d'abord que la ſurface d'un fluide dont toutes les parties ſont ſuppoſées peſer vers le centre de la terre, doit être ſphérique pour que le fluide ſoit en équilibre. Enſuite il démontre qu'un corps auſſi peſant qu'un égal volume de fluide doit s'y enfoncer tout-à fait, parce qu'en conſidérant deux pyramides égales du fluide ſuppoſé en équilibre autour du centre de la terre, celle où le corps ne ſeroit plongé qu'en partie, exerceroit une moindre preſſion que l'autre ſur le centre de la terre, ou en général ſur une ſurface ſphérique quelconque qu'on imagineroit autour de ce centre. Il prouve de la même maniere que les corps plus légers qu'un égal volume du fluide ne peuvent s'y enfoncer que juſqu'à ce que la partie ſubmergée occupe la place d'un volume de fluide auſſi peſant que le corps entier; d'où il déduit ces deux théorêmes Hydroſtatiques, que les corps plus légers que des volumes égaux d'un fluide y étant plongés, en ſont repouſſés de bas

en haut avec une force égale à l'excès du poids du fluide déplacé ſur celui du corps plongé, & que les corps plus peſans y perdent une partie de leur poids égale à celui du fluide déplacé.

Archimede ſe ſert enſuite de ſon ſecond principe pour établir les loix de l'équilibre des corps qui flottent ſur un fluide; il démontre que toute Section de ſphere plus légere qu'un égal volume du fluide, y étant plongée, doit néceſſairement ſe diſpoſer de maniere que la baſe en ſoit horiſontale; & ſa démonſtration conſiſte à faire voir que ſi la baſe étoit inclinée, le poids total du corps conſidéré comme concentré dans ſon centre de gravité, & la pouſſée verticale du fluide conſidérée auſſi comme concentrée dans le centre de gravité de la partie ſubmergée, tendroient toujours à faire tourner le corps juſqu'à ce que ſa baſe fût redevenue horiſontale.

Tels ſont les objets du premier Livre. Dans le ſecond, Archimede donne, d'après les mêmes principes, les loix de l'équilibre de différens ſolides formés par la révolution des Sections coniques, & plongés dans des fluides plus peſans que ces corps; il examine les cas où ces conoïdes peuvent y demeurer inclinés, ceux où ils doivent s'y tenir debout, & ceux où ils doivent culbuter ou ſe redreſſer. Ce Livre eſt un des plus beaux monumens du génie d'Archimede, & renferme une théorie de la ſtabilité des corps flottans, à laquelle les modernes ont peu ajouté.

Quoique d'après ce qu'Archimede avoit démontré, il ne fût pas difficile de déterminer la preſſion d'un fluide ſur le fond ou ſur les parois du vaſe dans lequel il eſt renfermé, Stevin eſt néanmoins le premier qui ait entrepris cette re-

cherche, & qui ait découvert le paradoxe Hydroſtatique, qu'un fluide peut exercer une preſſion beaucoup plus grande que ſon propre poids. C'eſt dans le tome troiſieme des *Hypomnemata Mathematica*, traduits de l'Hollandois par Snellius, & publiés à Leyde en 1608, que je trouve la théorie Hydroſtatique de Stevin. Après avoir prouvé qu'un corps ſolide de figure quelconque, & de même gravité que l'eau peut y reſter dans une ſituation quelconque, par la raiſon qu'il occupe la même place, & peſe autant que ſi c'étoit de l'eau, Stevin imagine un vaſe rectangulaire rempli d'eau, & il fait voir aiſément que ſon fond doit ſupporter tout le poids de l'eau qui remplit le vaſe. Il ſuppoſe enſuite qu'on plonge dans ce vaſe un ſolide de figure quelconque, & de même gravité que l'eau; il eſt clair que la preſſion reſtera la même; de ſorte que ſi on donne au ſolide plongé une figure telle qu'il ne reſte plus qu'un canal de fluide d'une figure quelconque, la preſſion de ce canal ſur la baſe ſera encore la même, & par conſéquent égale au poids d'une colonne verticale d'eau qui auroit cette même baſe. Or Stevin obſerve qu'en ſuppoſant ce ſolide fixement arrêté à ſa place, il n'en peut réſulter aucun changement dans l'action de l'eau ſur le fond du vaſe; donc la preſſion ſur ce fond ſera toujours égale au poids de la même colonne d'eau, quelle que ſoit la figure du vaſe.

Stevin paſſe de-là à déterminer la preſſion de l'eau ſur les parois verticales ou inclinées; il diviſe leur ſurface en pluſieurs petites parties par des lignes horiſontales, & il fait voir que chaque partie eſt plus preſſée que ſi elle étoit horiſontale & à la hauteur de ſon bord ſupérieur, mais qu'en même tems elle eſt moins preſſée que ſi elle étoit placée

horiſontalement à la hauteur de ſon bord inférieur. D'où en diminuant la largeur des parties, & augmentant leur nombre à l'infini, il prouve par la méthode des limites, que la preſſion ſur une paroi plane inclinée, eſt égale au poids d'une colonne dont cette paroi ſeroit la baſe, & dont la hauteur ſeroit la moitié de la hauteur du vaſe.

Il détermine enſuite la preſſion ſur une partie quelconque d'une paroi plane inclinée, & il la trouve égale au poids d'une colonne d'eau qui ſeroit formée en appliquant perpendiculairement à chaque point de cette partie des droites égales à la profondeur de ce point ſous l'eau. Ce théorême étant ainſi démontré pour des ſurfaces planes quelconques, ſituées comme l'on voudra, il eſt facile de l'étendre à des ſurfaces courbes quelconques, & d'en conclure que la preſſion exercée par un fluide peſant contre une ſurface quelconque, a pour meſure le poids d'une colonne de ce même fluide, laquelle auroit pour baſe cette même ſurface, convertie en une ſurface plane, s'il eſt néceſſaire, & dont les hauteurs répondantes aux différens points de la baſe, ſeroient les mêmes que les diſtances des points correſpondans de la ſurface à la ligne de niveau du fluide, ou ce qui revient au même, cette preſſion ſera meſurée par le poids d'une colonne qui auroit pour baſe la ſurface preſſée, & pour hauteur la diſtance verticale du centre de gravité de cette même ſurface, à la ſurſace ſupérieure du fluide.

Les théories précédentes de l'équilibre & de la preſſion des fluides ſont, comme l'on voit, entiérement indépendantes des principes généraux de la Statique, n'étant fondées que ſur des principes d'expérience, particuliers aux fluides; & cette maniere de démontrer les loix de l'Hydroſtatique,

en déduisant de la connoissance expérimentale de quelques-unes de ces loix, celle de toutes les autres a été adoptée depuis par la plupart des Auteurs modernes, & a fait de l'Hydrostatique une science tout-à-fait différente, & indépendante de la Statique.

Cependant il étoit important de lier ces deux sciences ensemble, & de les faire dépendre d'un seul & même principe. Or parmi les différens Principes qui peuvent servir de base à la Statique, & dont nous avons donné une exposition succinte dans la premiere Section, il est visible qu'il n'y a que celui des vîtesses virtuelles qui s'applique naturellement à l'équilibre des fluides. Aussi Galilée, Auteur de ce Principe, s'en est servi également pour démontrer les principaux théorêmes de Statique & d'Hydrostatique.

Dans son Discours *intorne alle cose che stanno in su l'aqua, o che in quelle si mouvono*; il déduit immédiatement de ce principe l'équilibre de l'eau dans un syphon, en faisant voir que si on suppose le fluide à la même hauteur dans les deux branches, il ne sauroit descendre dans l'une, & monter dans l'autre, sans que les momens ne soient égaux dans la partie du fluide qui descend, & dans celle qui monte. Galilée démontre d'une maniere semblable l'équilibre des fluides avec les solides qui y sont plongés; & quoique ses démonstrations paroissent n'avoir pas toute la rigueur qu'on y pourroit désirer, il est cependant facile de l'y mettre en envisageant le Principe dont il s'agit dans une plus grande généralité, ainsi que l'a fait depuis l'Abbé Grandi dans ses notes, au même Traité de Galilée. Descartes & Pascal ont également employé le principe des vîtesses virtuelles dans l'Hydrostatique ; ce dernier sur-tout en a fait le plus grand usage dans son

Traité *de l'équilibre des liqueurs*, & s'en eſt ſervi pour démontrer la propriété principale des fluides; ſavoir qu'une preſſion quelconque appliquée à un point de leur ſurface, ſe répand également dans tous les autres points.

Néanmoins, quoique ce Principe ait l'avantage d'être ſimple & général, ſoit pour l'équilibre des fluides, ſoit pour celui des corps ſolides, il a été abandonné par la plupart des Auteurs modernes qui ont traité de l'Hydroſtatique, & ſur-tout par ceux qui ont entrepris de reculer les limites de cette Science, en cherchant les loix de l'équilibre des fluides hétérogenes, dont toutes les parties ſont animées par des forces quelconques; recherche très-importante par le rapport qu'elle a avec la fameuſe queſtion de la figure de la Terre.

Huyghens a pris dans cette recherche, pour principe d'équilibre, la perpendicularité de la peſanteur à la ſurface. Newton eſt parti du principe de l'égalité des poids des colonnes centrales. Bouguer a remarqué enſuite que ſouvent ces deux principes ne donnoient pas le même réſultat, & en a conclu que pour qu'il y eût équilibre dans une maſſe fluide, il falloit que les deux principes y euſſent lieu à la fois, & s'accordaſſent à donner la même figure à la ſurface du fluide. Mais feu M. Clairaut a démontré de plus qu'il peut y avoir des cas où cet accord ait lieu, & où cependant il n'y auroit point d'équilibre. Maclaurin a généraliſé le principe de Newton, en établiſſant que dans une maſſe fluide en équilibre, chaque particule doit être comprimée également par toutes les colonnes rectilignes du fluide, leſquelles appuient ſur cette particule, & ſe terminent à la ſurface; & M. Clairaut l'a rendu plus général encore, en faiſant voir que l'équilibre

libre d'une maſſe fluide, demande que les efforts de toutes les parties du fluide, renfermées dans un canal quelconque, aboutiſſant à la ſurface, ou rentrant en lui-même, ſe détruiſent mutuellement. Enfin il a déduit le premier de ce Principe, les vraies loix fondamentales de l'équilibre d'une maſſe fluide dont toutes les parties ſont animées par des forces quelconques, & il a trouvé les équations aux différences partielles, par leſquelles on peut exprimer ces loix. Découverte qui a changé la face de l'Hydroſtatique, & en a fait comme une ſcience nouvelle.

Le Principe de M. Clairaut n'eſt qu'une conſéquence naturelle du Principe de l'égalité de preſſion en tout ſens. Auſſi M. d'Alembert a-t-il déduit immédiatement de ce dernier principe, les mêmes équations différentielles que M. Clairaut avoit trouvées par le ſien; & il faut avouer que ce Principe renferme en effet la propriété la plus ſimple & la plus générale que l'expérience ait fait découvrir dans l'équilibre des fluides. Mais la connoiſſance de cette propriété eſt-elle indiſpenſable dans la recherche des loix de l'équilibre des fluides? Et ne peut-on pas dériver ces loix directement de la nature même des fluides conſidérés comme des amas de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres, & parfaitement mobiles en tout ſens? C'eſt ce que je vais tâcher de faire dans les Sections ſuivantes, en n'employant que le Principe général de l'équilibre dont j'ai fait uſage juſqu'ici pour les corps ſolides; & cette partie de mon travail fournira, non-ſeulement une des plus belles applications du Principe dont il s'agit, mais ſervira auſſi à ſimplifier à quelques égards la théorie même de l'Hydroſtatique.

On ſait que les fluides en général ſe diviſent en deux

eſpeces; en fluides incompreſſibles dont les parties peuvent changer de figure, mais ſans changer de volume; & en fluides compreſſibles & élaſtiques dont les parties peuvent changer à la fois de figure & de volume, & tendent toujours à ſe dilater avec une force connue qu'on ſuppoſe ordinairement proportionnelle à une fonction de la denſité.

L'eau, le mercure, &c, appartiennent à la premiere eſpece; & l'air, la vapeur de l'eau bouillante, &c, appartiennent à la ſeconde.

Nous traiterons d'abord de l'équilibre des fluides incompreſſibles; & enſuite de celui des fluides compreſſibles & élaſtiques.

SEPTIEME SECTION.

De l'équilibre des fluides incompreſſibles.

1. SOIT une maſſe fluide m, dont tous les points ſoient animés par des peſanteurs ou forces quelconques P, Q, R, &c, dirigées ſuivant les lignes p, q, r, &c, on aura, ſuivant les dénominations de l'article 12 de la Section 4, pour la ſomme des momens de toutes ces forces, la formule intégrale

$$S\,(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \text{\&c})\,dm,$$

laquelle devra être nulle en général, pour qu'il y ait équilibre dans le fluide.

2. Suppoſons d'abord le fluide renfermé dans un canal ou tuyau infiniment étroit, & de figure donnée; & imaginons ce fluide diviſé en tranches ou portions infiniment

petites, dont la hauteur ſoit ds, & la largeur ω, on pourra prendre $dm = \omega ds$, à cauſe que la largeur ω du tuyau eſt ſuppoſée infiniment petite, ds étant l'élément de la courbe du tuyau. Or en imaginant que le fluide reçoive un petit mouvement, & change infiniment peu de place dans le tuyau, ſoit δs le petit eſpace que la tranche ou particule dm parcourt dans le tuyau; il eſt clair que $\omega\delta s$ ſera la quantité de fluide qui paſſera en même-tems par chacune des Sections ω du canal. Donc à cauſe de l'incompreſſibilité du fluide, il faudra que cette quantité ſoit par-tout la même; de ſorte que faiſant $\omega\delta s = \alpha$, la quantité α ſera conſtante par rapport à la courbe du tuyau. On aura ainſi $\omega = \frac{\alpha}{\delta s}$, & par conſéquent $dm = \frac{\alpha ds}{\delta s}$; de ſorte que la formule qui exprime la ſomme des momens des forces, deviendra (en faiſant ſortir hors du ſigne intégral S la quantité conſtante α) $\alpha S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\frac{ds}{\delta s}$.

Maintenant il eſt viſible que puiſque δp, δq, δr, &c, ſont les variations des lignes p, q, r, &c, réſultantes de la variation δs, ces variations doivent avoir entr'elles les mêmes rapports que les différentielles dp, dq, dr, &c, ds, à cauſe de la figure du canal donnée; ainſi on aura $\frac{\delta p}{\delta s} = \frac{dp}{ds}$, $\frac{\delta q}{\delta s} = \frac{dq}{ds}$, $\frac{\delta r}{\delta s} = \frac{dr}{ds}$, &c; ce qui réduira la formule précédente à cette forme,

$$\alpha S(Pdp + Qdq + Rdr + \&c),$$

où les différentielles dp, dq, dr, &c, ſe rapportent à la courbe du canal, & le ſigne S indique une intégrale priſe par toute l'étendue du canal.

Faiſant donc cette quantité $= 0$, on aura l'équation

$$S\,(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c) = 0,$$

laquelle contient la loi générale de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un canal de figure quelconque.

3. Si outre les forces P, Q, R, &c, qui animent chaque point du fluide, il y avoit de plus à l'une des extrémités du canal une force extérieure Π' qui agît par le moyen d'un piston sur la surface du fluide, & perpendiculairement aux parois du canal; alors dénotant par $\delta s'$ le petit espace parcouru par la tranche de fluide qu'on suppose pressée par la force Π', tandis que les autres tranches parcourent les différens espaces δs, il faudra ajouter à la somme des momens des forces P, Q, R, &c, le moment de la force Π', lequel sera représenté par $\Pi'\delta s'$. Or si on nomme ω' la section du canal à l'endroit où agit la force Π', on aura $\omega'\delta s'$ pour la quantité de fluide qui passe par la section ω', tandis que par une autre section quelconque ω, il passe la quantité de fluide $\omega\,\delta s$.

Mais l'incompressibilité du fluide demande que ces quantités soient par-tout les mêmes; donc ayant déja supposé $\omega\,\delta s = \alpha$, on aura aussi $\omega'\delta s' = \alpha$; par conséquent $\delta s' = \frac{\alpha}{\omega'}$. Donc la somme totale des momens des forces qui agissent sur le fluide, sera représentée par la formule

$$\alpha\left(\frac{\Pi'}{\omega'} + S\,(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c)\right);$$

de sorte que l'équation de l'équilibre sera

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + S\,(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c) = 0.$$

4. Il est évident que dans l'état d'équilibre, la force Π' doit être contrebalancée par la pression du fluide sur le

piſton dont la largeur eſt ω'; d'où il s'enſuit que cette preſſion ſera égale à $-\Pi'$, & par conſéquent,

$$= \omega' S(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c).$$

Donc en général la preſſion du fluide ſur chaque point du piſton, ſera exprimée par la formule intégrale

$$S(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c),$$

en prenant cette intégrale par toute la longueur du canal. Et cette preſſion ſera auſſi la même, ſi au lieu d'un piſton mobile on ſuppoſe un fond immobile qui ferme le canal d'un côté.

5. Si à l'autre extrémité du canal il y avoit une autre force Π'' agiſſante de même par le moyen d'un piſton, on trouveroit pareillement, en nommant ω'' la ſection du canal dans cet endroit, l'équation

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi''}{\omega''} + S(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c) = 0$$

pour l'équilibre du fluide.

6. Donc ſi le fluide n'eſt preſſé que par les deux forces extérieures Π' & Π'' appliquées aux ſurfaces ω' & ω'', il faudra pour l'équilibre que l'on ait $\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi''}{\omega''} = 0$; d'où l'on voit que les deux forces Π' & Π'' doivent être de directions contraires, & en même tems réciproquement proportionnelles aux ſurfaces ω', ω'' ſur leſquelles ces forces agiſſent. Propoſition qu'on regarde communément comme un principe d'expérience, ou du moins comme une ſuite du principe de l'égalité de preſſion en tout ſens, dans lequel la plupart des Auteurs d'Hydroſtatique font conſiſter la nature des fluides.

7. Connoiſſant les loix de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un canal très-étroit & de figure quelconque, il n'eſt pas difficile d'en déduire celles de l'équilibre d'une maſſe quelconque de fluide renfermée dans un vaſe ou non.

Car il eſt évident que ſi une maſſe fluide eſt en équilibre, & qu'on imagine un canal quelconque qui la traverſe, le fluide contenu dans ce canal ſera auſſi en équilibre de lui-même, c'eſt-à-dire, indépendamment de tout le reſte du fluide. On aura donc pour l'équilibre de cė canal, en faiſant abſtraction des forces extérieures (art. 1), $S(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c) = 0$, & comme la figure du canal doit être indéterminée, l'équation précédente devra toujours avoir lieu, en faiſant varier cette figure d'une maniere quelconque.

Dénotons en général par Φ la valeur de l'intégrale $S(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c)$ priſe par toute la longueur du canal, enſorte que l'équation de l'équilibre du canal ſoit $\Phi = 0$; & repréſentant les variations par la caractériſtique δ, comme c'eſt l'uſage, il faudra que l'on ait auſſi en général $\delta\Phi = 0$.

Or $\delta\Phi = \delta . S(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c)$ $= S\delta(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c) =$ $S(P\,\delta dp + Q\,\delta dq + R\,\delta dr + \&c + \delta P\,dp$ $+ \delta Q\,dq + \delta R\,dr + \&c)$. Changeant δd en $d\delta$, & faiſant enſuite diſparoître le double ſigne $d\delta$ par des intégrations par parties, ſuivant les principes connus du calcul des variations, on aura

$$\delta\Phi = P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.$$
$$+ S(\delta P\,dp - dP\,\delta p + \delta Q\,dq - dQ\,\delta q$$
$$+ \delta R\,dr - dR\,\delta r + \&c),$$

où les termes qui ſont hors du ſigne S ſe rapportent aux extrémités de l'intégrale repréſentée par ce ſigne, & répondent par conſéquent à la ſurface du fluide.

Maintenant comme les quantités P, Q, R, &c, qui repréſentent les forces, ſont, ou peuvent toujours être ſuppoſées des fonctions de p, q, r, &c, il eſt clair que la partie de $\delta\Phi$ qui eſt affectée du ſigne S, n'eſt plus ſuſceptible de réduction; donc pour que l'on ait en général $\delta\Phi = 0$, il faudra 1° que cette partie ſoit nulle d'elle-même, & que par conſéquent on ait pour chaque point de la maſſe fluide, l'équation identique

$$\delta P dp - dP\delta p + \delta Q dq - dQ\delta q +$$
$$\delta R dr - dR\delta r + \&c = 0;$$

2°. que l'on ait pour la ſurface extérieure du fluide,

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c = 0,$$

en ſuppoſant que les différences δp, δq, δr, &c, ſe rapportent à cette ſurface.

La premiere condition ſervira à déterminer la nature des forces P, Q, R, &c, par leſquelles le fluide pourra être en équilibre, & la ſeconde donnera la figure même que le fluide doit prendre en vertu de ces forces.

8. Suppoſons que les quantités P, Q, R, &c. ſoient telles que la premiere condition ait lieu, on aura dans ce cas ſimplement

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.$$

Or $\delta\Phi$ eſt évidemment une différentielle exacte priſe par rapport à la variable δ; ainſi $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c$, ſera auſſi une différentielle exacte; donc changeant δ en

d, on aura la différentielle exacte $P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c, dont Φ ſera l'intégrale.

Réciproquement ſi $P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c, eſt une différentielle exacte, la premiere condition ci-deſſus aura néceſſairement lieu. Car alors l'intégrale Φ de cette quantité ſera une fonction de p, q, r, &c; de ſorte qu'en différentiant

$$d\Phi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{\&c, \& de même}$$
$$\delta\Phi = P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \text{\&c, donc}$$
$$\delta d\Phi = \quad P\,dp + \delta Q\,dq + \delta R\,dr + \text{\&c}$$
$$+ P\,\delta dp + Q\,\delta dq + R\,\delta dr + \text{\&c, \&}$$
$$d\delta\Phi = dP\,\delta p + dQ\,\delta q + dR\,\delta r + \text{\&c}$$
$$+ P\,d\delta p + Q\,d\delta q + R\,d\delta r + \text{\&c.}$$

Mais par les principes du calcul des variations, δd eſt la même choſe que $d\delta$; donc on aura

$$\delta d\Phi - d\delta\Phi = \delta P\,dp + \delta Q\,dq + \delta R\,dr + \text{\&c}$$
$$- dP\,\delta p - dQ\,\delta q - dR\,\delta r - \text{\&c} = 0;$$

ce qui eſt la condition dont il s'agit. D'où il s'enſuit que cette condition ſe réduit à ce que les forces P, Q, R, &c, ſoient telles que $P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c, ſoit une quantité intégrable.

Nommant donc Φ l'intégrale de cette quantité, la ſeconde condition de l'équilibre ſera $\delta\Phi = 0$, ou bien $d\Phi = 0$ pour la ſurface extérieure du fluide; de ſorte qu'en intégrant on aura $\Phi =$ conſt. pour l'équation de cette ſurface.

9. Si on conſidere l'équation même

$$\delta P\,dp - dP\,\delta p + \delta Q\,dq - dQ\,\delta q + \delta R\,dr - dR\,\delta r + \text{\&c} = 0,$$

trouvée

trouvée dans l'article 7, on en pourra déduire les conditions analitiques qui doivent avoir lieu entre les expressions des forces P, Q, R, &c; car en regardant ces expressions comme des fonctions quelconques de p, q, r, &c, on aura, suivant la notation reçue, $dP = \frac{dP}{dp} dp + \frac{dP}{dq} dq + \frac{dP}{dr} dr +$ &c; de même

$$\delta P = \frac{dP}{dp} \delta p + \frac{dP}{dq} \delta q + \frac{dP}{dr} \delta r + \&c,$$

& ainsi des autres différences; substituant ces valeurs dans l'équation précédente, & ordonnant les termes, elle deviendra de cette forme,

$$\left(\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp}\right)(\delta q dp - dq \delta p) +$$
$$\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right)(\delta r dp - dr \delta p) +$$
$$\left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right)(\delta r dq - dr \delta q) + \&c = 0,$$

& devra avoir lieu indépendamment des différences dp, dq, dr, &c; δp, δq, δr, &c.

10. Donc s'il n'y a aucune relation donnée entre les variables p, q, r, &c, il faudra faire séparément

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} = 0$$
$$\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp} = 0$$
$$\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq} = 0,$$

&c.

Ce sont les équations de condition connues pour l'intégrabilité de la formule $P dp + Q dq + R dr +$ &c.

Mais ſi la variable r dépendoit, par exemple, des deux variables p & q, enſorte que $dr = Adp + Bdq$, on auroit également $\delta r = A\delta p + B\delta q$; donc $\delta r dp - dp \delta r = B(\delta q dp - dq \delta p)$, $\delta r dq - dr \delta q = A(\delta p dq - dp \delta q)$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation générale, & égalant à zéro le coëfficient de $\delta q dp - dq \delta p$, on auroit l'équation

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} + B\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right) - A\left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right) = 0,$$

laquelle tiendra lieu des trois premieres équations de condition, & ainſi du reſte.

11. Lorſque la maſſe fluide n'a que deux dimenſions, la poſition de chacun de ſes points ne dépend que de deux variables; ainſi les différentes variables p, q, r, &c, pourront toujours ſe réduire à deux ſeulement; & il n'y aura alors qu'une ſeule équation de condition. Mais quand la maſſe fluide a trois dimenſions, la poſition de ſes points dépend en général de trois variables; par conſéquent on pourra toujours réduire à trois toutes les différentes variables p, q, r, &c, & l'on aura auſſi trois équations de condition.

12. Au reſte, on a fait abſtraction juſqu'ici de la denſité du fluide, ou plutôt on l'a regardée comme conſtante & égale à l'unité; mais ſi on vouloit la ſuppoſer variable, alors en nommant Δ la denſité d'une particule quelconque dm, on auroit (art. 2) $dm = \Delta \omega ds$; moyennant quoi les quantités P, Q, R, &c, ſe trouveroient toutes multipliées par Δ. Ainſi l'on aura pour l'équilibre des fluides de denſité variable, les mêmes loix que pour l'équilibre des fluides

de denſité uniforme, en multipliant ſeulement les différentes forces par la denſité du point ſur lequel elles agiſſent; c'eſt-à-dire, en écrivant ſimplement ΔP, ΔQ, ΔR, &c, à la place de P, Q, R, &c.

13. Nous avons commencé par chercher les loix de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un tuyau infiniment étroit, & nous en avons déduit enſuite les loix générales de l'équilibre d'une maſſe fluide quelconque. On peut néanmoins parvenir immédiatement à ces dernieres loix, en conſidérant d'abord la queſtion dans toute ſa généralité, & faiſant uſage de la méthode de la Section quatrieme.

Suppoſons, pour plus de ſimplicité, que toutes les forces qui agiſſent ſur les particules du fluide ſoient réduites à trois, repréſentées par X, Y, Z, & dirigées ſuivant les coordonnées rectangles x, y, z, c'eſt-à-dire, tendantes à diminuer ces coordonnées. Nous avons donné dans l'article 5 de la Section cinquieme, les formules générales de cette réduction. Nommant dm la maſſe d'une particule quelconque, on aura pour la ſomme des momens des forces X, Y, Z, la formule intégrale

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm:$$

or le volume de la particule dm peut être repréſenté par $dx\,dy\,dz$; ainſi en exprimant par Δ la denſité, il eſt clair qu'on aura $dm = \Delta\, dx\,dy\,dz$; & le ſigne d'intégration S appartiendra à la fois aux trois variables x, y, z.

Il faudra de plus avoir égard à l'équation de condition réſultante de l'incompreſſibilité du fluide, laquelle étant ſuppoſée repréſentée par $L = 0$, on aura (en différentiant

ſelon δ, multipliant par un coëfficient indéterminé λ, & intégrant) la formule $S\lambda\delta L$ à ajouter à la précédente.

S'il n'y a point de forces accélératrices qui agiſſent ſur la ſurface du fluide, ni de conditions particulieres à cette ſurface, on aura ſimplement pour l'équilibre cette équation (Sect. 4, art. 14),

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + S\lambda\delta L = 0,$$

dans laquelle il faudra prendre les intégrales relativement à toute la maſſe du fluide.

14. Cherchons maintenant les valeurs de L & de ſa variation δL. Il eſt viſible que la condition de l'incompreſſibilité conſiſte en ce que le volume de chaque particule ſoit conſtant; ainſi ayant exprimé ce volume par $dx\,dy\,dz$, on aura $dx\,dy\,dz =$ conſt. pour l'équation de condition; par conſéquent L ſera $= dx\,dy\,dz -$ conſt; & $\delta L = \delta.(dx\,dy\,dz)$.

Pour avoir la variation $\delta.(dx\,dy\,dz)$, il ſemble qu'il n'y auroit qu'à différentier ſimplement $dx\,dy\,dz$ ſelon δ; mais il y a ici une conſidération particuliere à faire, & ſans laquelle le calcul ne ſeroit pas rigoureux. La quantité $dx\,dy\,dz$ n'exprime le volume d'une particule qu'autant qu'on ſuppoſe la figure de cette particule, un parallélepipede rectangulaire dont les côtés ſont paralleles aux axes des x, y, z; cette ſuppoſition eſt très-permiſe, puiſqu'on peut imaginer le fluide partagé en élémens infiniment petits d'une figure quelconque. Or $\delta.(dx\,dy\,dz)$ doit exprimer la variation que ſouffre ce volume lorſque la particule change infiniment peu de ſituation, ſes coordonnées x, y, z devenant $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$; & il eſt clair que ſi dans ce changement

de lieu la particule changeoit auſſi de figure & de poſition relativement aux axes des x, y, z, on ne pourroit plus meſurer ſon volume par le produit des différences $d(x+\delta x)$, $d(y+\delta y)$, $d(z+\delta z)$, de ſes coordonnées; ainſi pour avoir la variation exacte du volume, il faut avoir égard à la fois au changement de poſition & de figure de la particule.

Pour cela il faut conſidérer les coordonnées qui répondent aux angles du parallélepipede $dx\,dy\,dz$ dans ſon état primitif, & dans l'état changé. Dans le premier état il eſt viſible que ces coordonnées ſont x, y, z; $x+dx, y, z$; $x, y+dy, z$; $x, y, z+dz$; $x+dx, y+dy, z$; $x+dx, y, z+dz$; $x, y+dy, z+dz$; $x+dx, y+dy, z+dz$; & de-là, en prenant les racines de la ſomme des carrés des différences des coordonnées pour deux angles quelconques, on aura la droite qui joint ces angles, & qui ſera ou un côté ou une diagonale du parallélépipede; on trouve ainſi dx, dy, dz pour les côtés, & $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $\sqrt{(dx^2+dz^2)}$, $\sqrt{(dy^2+dz^2)}$, $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ pour les diagonales.

Suppoſons maintenant que les coordonnées x, y, z deviennent $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, & regardons δx, δy, δz comme des fonctions quelconques de x, y, z; en faiſant varier ſucceſſivement les x, y, z de dx, dy, dz, on trouvera ce que doivent devenir les autres coordonnées $x+dx, y, z$; $x, y+dy, z$, &c.

Ainſi en faiſant varier ſimplement x de dx, on aura $x+dx+\delta x+\frac{d\delta y}{dx}dx$, $y+\delta y+\frac{d\delta y}{dx}dx$, $z+\delta z+\frac{d\delta z}{dx}dx$ pour ce que deviennent les coordonnées $x+dx, y: z$; faiſant varier y de dy, on aura $x+\delta x$

$+ \frac{d\delta x}{dy} dy$, $y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dy} dy$, $z + \delta z + \frac{d\delta z}{dy} dy$ pour ce que deviennent x, $y + dy$, z; & faisant varier z de dz on aura $x + \delta x + \frac{d\delta x}{dz} dz$, $y + \delta y + \frac{d\delta y}{dz} dz$, $z + dz + \delta z + \frac{d\delta z}{dz} dz$ pour ce que deviennent x, y, $z + dz$, de même en faisant varier à la fois x de dx & y de dy, on aura $x + dx + \delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$, $y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx + \frac{d\delta y}{dy} dy$, $z + \delta z + \frac{d\delta z}{dx} dx + \frac{d\delta z}{dy} dy$, pour ce que deviennent $x + dx$, $y + dy$, z; & ainsi des autres.

De-là en prenant la racine de la somme des carrés des différences de ces nouvelles coordonnées pour deux angles quelconques du rhomboïde dans lequel s'est changé le parallélepipede $dxdydz$, on trouvera aux quantités infiniment petites du troisieme ordre près, ces expressions pour les côtés $dx + \frac{d\delta x}{dx} dx$, $dy + \frac{d\delta y}{dy} dy$, $dz + \frac{d\delta z}{dz} dz$, & celles-ci pour les diagonales

$$\sqrt{\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx\right)^2 + \left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx\right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy\right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx\right)^2 + \left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy\right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz\right)^2\right]};$$

d'où il est aisé de conclure que le rhomboïde dont il s'agit est de nouveau un parallélepipede rectangle, & que par

conſéquent ſon contenu peut être exprimé par le produit des côtés $dx\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)$, $dy\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)$, $dz\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)$. Donc la variation du volume du premier parallélepipede, c'eſt-à-dire, la valeur de $\delta.(dx\,dy\,dz)$ ſera exprimée par

$$dx\,dy\,dz\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)-dx\,dy\,dz;$$

par conſéquent développant les termes, & négligeant les infiniment petits des ordres ſupérieurs, on aura

$$\delta.(dx\,dy\,dz)=dx\,dy\,dz\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right);$$

c'eſt la valeur de δL qu'il faudra ſubſtituer dans l'équation de l'article précédent.

15. Cette équation deviendra donc de cette forme, en y mettant pour dm ſa valeur $\Delta\,dx\,dy\,dz$,

$$S\left(\Delta X\delta x+\Delta Y\delta y+\Delta Z\delta z+\lambda\frac{d\delta x}{dx}+\lambda\frac{d\delta y}{dy}+\lambda\frac{d\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz=0;$$ & il ne s'agira plus que d'y faire diſparoître les doubles ſignes $d\delta$ par la méthode expoſée dans l'article 17 de la quatrieme Section.

Conſidérons d'abord la quantité $S\lambda\frac{d\delta x}{dx}\,dx\,dy\,dz$, où le ſigne S dénote une triple intégrale relative à x, y, z; il eſt clair que comme la différence de δx n'eſt relative qu'à la variation de x, il ne faudra auſſi pour la faire diſparoître qu'avoir égard à l'intégration relative à x; c'eſt pourquoi on donnera d'abord à cette quantité la forme . . . . $S\,dy\,dz\,S\lambda\frac{d\delta x}{dx}\,dx$; enſuite on transformera l'intégrale

ſimple $S\lambda \frac{d\delta x}{dx} dx$ en $\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x' - S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx$; les quantités marquées d'un trait ſe rapportent au commencement de l'intégration, & celles qui en ont deux ſe rapportent aux points où elle finit, ſuivant la notation adoptée dans l'endroit cité. Ainſi la quantité dont il s'agit ſe trouvera changée en celle-ci,

$$S dy dz (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') - S dy dz S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx,$$

ou, ce qui eſt la même choſe,

$$S(\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz - S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx dy dz.$$

De la même maniere & par un raiſonnement ſemblable, on changera les quantités $S\lambda \frac{d\delta y}{dy} dx dy dz$, & $S\lambda \frac{d\delta z}{dz} dx dy dz$, en celles-ci,

$$S(\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz - S \frac{d\lambda}{dy} \delta y dx dy dz, \&$$

$$S(\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy - S \frac{d\lambda}{dz} \delta z dx dy dz.$$

Faiſant ces ſubſtitutions, on aura donc pour l'équilibre de la maſſe fluide, cette équation générale:

$$S\left[\left(\Delta X - \frac{d\lambda}{dx}\right)\delta x + \left(\Delta Y - \frac{d\lambda}{dy}\right)\delta y + \left(\Delta Z - \frac{d\lambda}{dz}\right)\delta z\right] dx dy dz$$
$$+ S(\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz + S(\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz$$
$$+ S(\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy = 0,$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à égaler ſéparément à zéro, les coëfficiens des variations indéterminées δx, δy, δz (art. 8, Sect. 4).

16.

16. On aura donc d'abord ces trois équations indéfinies

$$\Delta X - \frac{d\lambda}{dx} = 0,\ \Delta Y - \frac{d\lambda}{dy} = 0,\ \Delta Z - \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

lesquelles doivent avoir lieu pour tous les points de la masse fluide.

Ensuite si le fluide est libre de tous côtés, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ qui se rapportent aux points de la surface du fluide seroient aussi indéterminées, & par conséquent il faudra encore égaler séparément à zéro leurs coëfficiens, ce qui donnera $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$; c'est-à-dire, en général $\lambda = 0$ pour tous les points de la surface du fluide; & cette équation servira à déterminer la figure de cette surface.

Il en sera de même lorsque le fluide est renfermé dans un vase, pour la partie de la surface où le vase est ouvert; mais à l'égard de la partie qui est appuyée contre les parois, il est clair que les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ doivent avoir entr'elles des rapports donnés par la figure de ces parois, puisque le fluide ne peut que couler dans leur direction, & nous démontrerons plus bas (art. 20, 21), que quelle que puisse être leur figure, les termes qui renferment les variations en question seront toujours nuls d'eux-mêmes; de sorte qu'il n'y aura aucune condition relativement à cette partie de la surface du fluide.

17. Les trois équations qu'on vient de trouver pour les conditions de l'équilibre du fluide, donnent $\frac{d\lambda}{dx} = \Delta X$, $\frac{d\lambda}{dy} = \Delta Y$, $\frac{d\lambda}{dz} = \Delta Z$; donc puisque $d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}\, dx +$

$\frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz$, on aura $d\lambda = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$; par conſéquent il faudra que la quantité $\Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$ ſoit une différentielle complette en x, y, z; & cette condition renferme ſeule les loix de l'équilibre des fluides.

On voit auſſi qu'elle s'accorde avec ce qu'on a trouvé ci-deſſus (art. 8, 12); car par ce qu'on a démontré dans l'article 5 de la Section cinquieme, l'on a en général $Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr +$ &c.

Si on élimine la quantité λ des mêmes équations, on aura les ſuivantes,

$$\frac{d.\Delta X}{dy} = \frac{d.\Delta Y}{dx},$$

$$\frac{d.\Delta X}{dz} = \frac{d.\Delta Z}{dx},$$

$$\frac{d.\Delta Y}{dz} = \frac{d.\Delta Z}{dy},$$

équations qui different entr'elles, & dont l'une ne pourroit pas être regardée comme la ſuite des deux autres.

Ces conditions ſont donc néceſſaires pour que la maſſe fluide puiſſe être en équilibre, en vertu des forces X, Y, Z. Lorſqu'elles ont lieu par la nature de ces forces, on eſt aſſuré que l'équilibre eſt poſſible; & il ne reſte plus qu'à trouver la figure que la maſſe fluide doit prendre pour être en équilibre, c'eſt-à-dire, l'équation de la ſurface extérieure du fluide. Or nous avons vu dans l'article 16, qu'on doit avoir dans chaque point de cette ſurface $\lambda = 0$. Donc puiſque $d\lambda = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$, on aura en intégrant

$\lambda = \int \Delta (X dx + Y dy + Z dz) +$ conſt; par conſéquent l'équation de la ſurface extérieure ſera

$$\int \Delta (X dx + Y dy + Z dz) = K,$$

K étant une conſtante quelconque; & cette équation ſera toujours en termes finis, puiſque la quantité $\Delta (X dx + Y dy + Z dz)$ eſt ſuppoſée une différentielle exacte.

18. Si la quantité $X dx + Y dy + Z dz$ eſt elle-même une différentielle exacte, ce qui a toujours lieu lorſque les forces X, Y, Z ſont le réſultat d'une ou de pluſieurs attractions proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances aux centres, puiſqu'on a en général $X dx + Y dy + Z dz = P dp + Q dq + R dr +$ &c (Sect. V, art. 5); nommant cette quantité $d\Phi$, on aura alors $d\lambda = \Delta d\Phi$; donc pour que $d\lambda$ ſoit une différentielle complette, il faudra que Δ ſoit une fonction de Φ. Par conſéquent $\lambda = \int \Delta d\Phi$ ſera auſſi néceſſairement une fonction de Φ.

On aura donc dans ce cas pour la figure de la ſurface l'équation fonct. $\Phi = K$; ſavoir $\Phi =$ à une conſtante; de même que ſi la denſité du fluide étoit uniforme. De plus, puiſque Φ eſt conſtante à la ſurface, & que Δ eſt fonction de Φ, il s'enſuit que la denſité Δ doit être la même dans tous les points de la ſurface extérieure d'une maſſe fluide en équilibre.

Dans l'intérieur du fluide la denſité peut varier d'une maniere quelconque, pourvu qu'elle ſoit toujours une fonction de Φ; elle devra donc être conſtante par-tout où la valeur de Φ ſera conſtante; de ſorte que $\Phi = h$, ſera en général l'équation des couches de même denſité, h étant une conſtante. Donc différentiant, on aura $d\Phi = 0$, ou $X dx +$

$Ydy + Zdz = 0$ pour l'équation générale de ces couches; & il est visible que cette équation est celle des surfaces auxquelles la résultante des forces X, Y, Z est perpendiculaire, & que M. Clairaut appelle surfaces de niveau. D'où il s'ensuit que la densité doit être uniforme dans chaque couche de niveau formée par deux surfaces de niveau infiniment voisines.

Et cette loi doit avoir lieu dans la Terre & dans les Planetes, supposé que ces corps aient été originairement fluides, & qu'ils aient conservé en se durcissant la forme qu'ils avoient prise en vertu de l'attraction de leurs parties combinée avec la force centrifuge.

19. L'équation $\int \Delta\, (Xdx + Ydy + Zdz) = K$ de la surface des fluides en équilibre, a lieu également pour les fluides libres de tous côtés, & pour ceux qui sont renfermés dans des vases, du moins relativement à la partie de leur surface qui répond aux ouvertures du vase (art. 17).

Pour ce qui est de la surface contiguë aux parois du vase, il est clair qu'elle doit avoir la même figure que ces parois; de sorte que si le vase est inflexible, la figure dont il s'agit sera donnée & indépendante des conditions de l'équilibre. Il faudra donc que par rapport à cette partie de la surface du fluide, les termes de l'équation générale de l'équilibre, contenant les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ disparoissent d'eux-mêmes, puisqu'on ne pourroit les faire évanouir par aucune condition particuliere; c'est ce qu'il est bon d'examiner pour ne laisser rien à desirer sur la justesse & la généralité de nos méthodes.

20. Considérons un point quelconque de la surface du fluide contiguë aux parois du vase supposé inflexible & d'une

figure donnée ; ce point répondra néceſſairement au commencement ou à la fin de chacune des intégrations relatives à x, y, z, ou au commencement de l'une & à la fin des deux autres, ou réciproquement (art. 15). Suppoſons d'abord qu'il réponde à la fin de chacune des trois intégrations ; les variations de x, y, z relatives à ce point, ſeront alors $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ & les termes affectés de ces variations ſeront $\lambda'' \delta x'' dy dz$, $\lambda'' \delta y'' dx dz$, $\lambda'' \delta z'' dx dy$. De ſorte qu'on aura pour tous les points ſemblables de la ſurface du fluide, les intégrales $S \lambda'' \delta x'' dy dz$, $S \lambda'' \delta y'' dx dz$, $S \lambda'' dz'' dx dy$, dont la premiere doit être priſe en faiſant varier ſéparément y & z, après avoir ſubſtitué pour x ſa valeur en y & z donnée par la nature de la ſurface ou de la paroi du vaſe, dont la ſeconde doit être priſe en faiſant varier ſéparément x & z, & ſubſtituant pour y ſa valeur en x & z donnée par la même ſurface, & dont la troiſième doit être priſe pareillement, en faiſant varier ſucceſſivement & ſéparément x & y, & ſubſtituant pour z ſa valeur donnée en x & y par la même ſurface.

Or il eſt viſible qu'on peut réduire ces trois intégrales à la même forme, en ſuppoſant qu'on ſubſtitue dans les deux premieres, à la place de z, ſa valeur en x & y, & qu'on prenne enſuite dans la premiere x variable, & dans la ſeconde y variable à la place de z.

Ainſi ſi on repréſente par $dz = p\,dx + q\,dy$ l'équation de la ſurface donnée, il n'y aura qu'à mettre dans l'intégrale $S \lambda'' \delta x'' dy dz$, $p\,dx$ à la place de dz, & dans l'intégrale $S \lambda'' \delta y'' dx dz$, $q\,dy$ à la place de dz ; enſuite intégrer l'une & l'autre relativement à x & à y. Mais il y a ici une obſervation importante à faire, laquelle conſiſte en ce que les

différences dx, dy, dz doivent toujours être prises positivement, parce qu'elles sont censées telles dans la parallélepipede rectangulaire $dx\,dy\,dz$ qui exprime le volume de la particule dm, lequel ne peut jamais devenir négatif par la nature même de la chose. D'où il s'ensuit que dans les substitutions de $p\,dx$ & $q\,dy$ à la place de dz, il faut toujours supposer p & q des quantités positives.

Nous supposerons donc en général que l'équation des parois du vase soit représentée par $dz = \pm p\,dx \pm q\,dy$, p & q étant toujours des quantités positives; & d'après ce que nous venons de démontrer, on aura au lieu des trois intégrales $S\lambda''\delta x''\,dy\,dz$, $S\lambda''\delta y''\,dx\,dz$, $S\lambda''\delta z''\,dx\,dy$, celle-ci unique $S\lambda''(p\delta x'' + q\delta y'' + \delta z'')\,dx\,dy$.

Maintenant puisque nous avons supposé que les points que nous considérons de la surface du fluide, répondent à la fin de chacune des trois intégrations relatives à x, y, z, il est facile de se convaincre que cette supposition ne peut avoir lieu à moins que les coordonnées x, y, z de ces points ne tombent toutes du même côté de la surface dont il s'agit, c'est-à-dire, du même côté des plans qui touchent cette surface dans les mêmes points. Or pour cela il faut nécessairement que l'équation différentielle de la surface soit dans ces points $dz = -p\,dx - q\,dy$, afin que x & y croissant z diminue. Mais $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ étant *(hyp:)* les variations de x, y, z pour ces mêmes points, il est visible qu'elles doivent aussi avoir entr'elles les mêmes rapports que les différentielles dx, dy, dz, du moins tant qu'on regarde la figure de la surface comme invariable. On aura donc aussi $\delta z'' = -p\,\delta x'' - q\,\delta y''$; valeur qui étant substituée dans l'intégrale ci-dessus, la rend évidemment nulle.

21. Si les points dont il s'agit, au lieu de répondre à la fin des trois intégrations relatives à x, y, z, répondoient au commencement de ces mêmes intégrations, alors on auroit dans l'équation générale de l'équilibre (art. 15), relativement à ces points, les trois intégrales $-S\lambda'\delta x'dydz$ $-S\lambda'\delta y'dxdz - S\lambda'\delta z'dxdy$, qui ſe changeroient de même en celle-ci unique,

$$-S\lambda'(p\delta x' + q\delta y' + \delta z')dxdy;$$

& l'on auroit auſſi dans ce cas $dz = -pdx - qdy$, & par conſéquent auſſi $\delta z' = -p\delta x' - q\delta y'$; ce qui rendroit pareillement cette intégrale nulle.

Mais ſi ces mêmes points répondoient, par exemple, au commencement de l'intégration relative à x, & à la fin des deux intégrations relatives à y & z, alors les variations des coordonnées x, y, z pour ces points, ſeroient $\delta x'$, $\delta y''$, $\delta z''$, & les intégrales correſpondantes ſeroient

$$-S\lambda'\delta x'dydz + S\lambda''\delta y''dxdz + S\lambda''\delta z''dxdy,$$

dans leſquelles λ' ſeroit la même choſe que λ''; ces intégrales ſe changeroient donc en celle-ci,

$$S\lambda''(-p\delta x' + q\delta y'' + \delta z')dxdy.$$

Or il eſt facile de concevoir que pour que ce cas ait lieu, il faut que les deux coordonnées y & z ſe trouvent d'un même côté, & la coordonnée x de l'autre côté de chaque plan touchant la ſurface dans les points en queſtion; c'eſt ce qui demande que l'équation de la ſurface ſoit pour ces points de la forme $dz = pdx - qdy$; de ſorte qu'on aura auſſi $\delta z'' = p\delta x' - q\delta y''$, ce qui étant ſubſtitué dans l'intégrale précédente la rendra encore nulle.

On trouvera le même réſultat pour les autres cas où l'on conſidérera des points relatifs au commencement des intégrations ſuivant x & y, & à la fin de l'intégration ſuivant z, ou au commencement des intégrations ſuivant x & z, & à la fin de l'intégration ſuivant y, ou &c.

22. De ce que nous venons de démontrer par rapport à ces différens cas, on peut conclure que ſi on dénote par un trait les quantités qui répondent au commencement de l'intégration relative à z, c'eſt-à-dire les quantités qui appartiennent à la partie antérieure de la ſurface du fluide par rapport au plan des x & y, & qu'on dénote par deux traits les quantités répondantes à la fin de la même intégration ſuivant z, c'eſt-à-dire, les quantités relatives à la partie poſtérieure de la ſurface du fluide par rapport au même plan des x & y; qu'enſuite on repréſente en général par $dz + p\,dx + q\,dy = 0$ l'équation différentielle de la ſurface du fluide (p, q étant poſitives ou négatives); on pourra toujours transformer les trois expreſſions intégrales $S(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x')\,dy\,dz + S(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y')\,dx\,dz + S(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')\,dx\,dy$ de l'équation générale de l'équilibre de l'article 15 en ces deux-ci,

$$S\lambda''(\delta z'' + p''\delta x'' + q''\delta y'')\,dx\,dy$$
$$- S\lambda'(\delta z' + p'\delta x' + q'\delta y')\,dx\,dy.$$

Or puiſque $dz + p\,dx + q\,dy = 0$ eſt l'équation d'une ſurface courbe, il s'enſuit de la théorie connue, qu'il y a néceſſairement un multiplicateur r qui peut rendre cette équation intégrable; de ſorte qu'on aura $r\,(dz + p\,dx + q\,dy) = du$, du étant la différentielle exacte d'une fonction

tion u de x, y, z. On aura donc auſſi en changeant d en δ dans la différentiation de u, $r(\delta z + p\,\delta x + q\,\delta y) = \delta u$; & par conſéquent $\delta z + p\,\delta x + q\,\delta y = \frac{\delta u}{r}$. Donc en marquant toutes les quantités d'un ou de deux traits pour les rapporter à la ſurface antérieure ou poſtérieure du fluide, & ſubſtituant dans les expreſſions intégrales ci-deſſus, ces expreſſions deviendront

$$S\,\frac{\lambda''\,\delta u''}{r''}\,dx\,dy - S\,\frac{\lambda'\,\delta u'}{r'}\,dx\,dy.$$

23. Soit maintenant ds l'élément de la ſurface du fluide, dont l'équation eſt en général $dz + p\,dx + q\,dy = 0$, on aura, comme l'on ſait,

$$ds = dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Mais en regardant u comme une fonction de x, y, z, on a ſuivant la notation reçue, $r = \frac{du}{dz}$, $rp = \frac{du}{dx}$, $rq = \frac{du}{dy}$; donc $\frac{dx\,dy}{r} = \frac{ds}{r\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$.

Donc ſi on fait pour abréger

$$V = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$$

& qu'on marque toutes les quantités d'une ou de deux traits pour les rapporter à la ſurface antérieure ou poſtérieure du fluide, on pourra donner aux expreſſions intégrales dont il

s'agit, cette forme $S\,\frac{\lambda''\,\delta u''}{V''}\,ds'' - S\,\frac{\lambda'\,\delta u'}{V'}\,ds'$.

Or par ce qui a été dit dans l'article 8 de la seconde Section, on voit que la quantité $\lambda ds \times \frac{\delta u}{V}$ peut représenter le moment d'une force égale à λds, & appliquée à l'élément ds de la surface du fluide, perpendiculairement à cette même surface, dont l'équation est supposée δu ou $du = 0$ (art. 22). Ainsi l'expression intégrale $S\,\frac{\lambda''\,\delta u''}{V''}\,ds''$ représentera la somme des momens des forces λ'' agissantes sur chaque point de la surface postérieure de la masse fluide dans des directions perpendiculaires à cette surface; de même l'expression $S\,\frac{\lambda'\,\delta u'}{V'}\,ds'$ représentera la somme des momens des forces λ' appliquées à chaque point de la surface antérieure, & dirigées aussi perpendiculairement à cette surface; de sorte que $-S\,\frac{\lambda'\,\delta u'}{V'}\,ds'$ sera la somme des momens de ces dernieres forces prises en sens contraire, c'est-à-dire, en supposant leurs directions opposées à celles des forces λ'' par rapport au plan des x & y; ce qui revient à ce que toutes les forces appliquées à la surface de la masse fluide soient dirigées perpendiculairement à cette surface, & tendent de dedans en dehors, ou de dehors en dedans.

24. Donc puisque les expressions intégrales qui entrent dans l'équation générale de l'équilibre d'une masse fluide incompressible, & qui se rapportent aux points de la surface de cette masse, sont équivalentes à la somme des momens d'une infinité de forces λ appliquées perpendiculairement à tous les points de cette surface; il s'ensuit que ces forces ont réellement lieu à la surface du fluide; & il est

visible qu'elles ne sont autre chose que la pression que le fluide exerce dans tous les points de sa surface, en vertu des forces qui agissent dans toute sa masse.

25. Cette pression sera donc exprimée en général par la quantité λ, savoir par la formule $\int \Delta (X dx + Y dy + Z dz)$ rapportée à la surface du fluide (art. 17); & il est clair que par-tout où le fluide est libre, elle devra être nulle dans l'état d'équilibre; mais par-tout où la surface du fluide sera appliquée contre la surface d'un corps solide quelconque, il faudra que ce corps soutienne l'effort des forces λ appliquées à sa surface. D'où il est facile de déduire les loix de l'équilibre des fluides avec les solides qui les contiennent, ou qui y sont plongés. Comme elles sont assez connues, nous ne nous arrêterons pas à les détailler; nous nous dispenserons aussi de donner des applications particulieres de la théorie générale de l'équilibre des fluides incompressibles, n'ayant gueres rien à ajouter à ce qu'on trouve sur cette matiere, dans les Auteurs qui en ont déja traité.

HUITIEME SECTION.

De l'équilibre des fluides compressibles & élastiques.

1. SOIENT comme dans l'article 13 de la Section précédente, X, Y, Z les forces qui agissent sur chaque point de la masse fluide, réduites aux directions des coordonnées x, y, z, & tendantes à diminuer ces coordonnées; on

aura d'abord $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$ pour la somme de leurs momens.

Dans les fluides élastiques il y a de plus une force intérieure qu'on nomme élasticité ou ressort, & qui tend à les dilater, ou à augmenter leur volume. Soit donc ϵ l'élasticité d'une particule quelconque dm; cette force étant dirigée à augmenter le volume $dx\,dy\,dz$ de la même particule tendra donc à diminuer la quantité $-\,dx\,dy\,dz$; par conséquent elle aura ou pourra être censée avoir pour moment la quantité $-\,\epsilon\delta.(dx\,dy\,dz)$. De maniere que la somme des momens provenans de l'élasticité de toute la masse fluide, sera exprimée par $-\,S\epsilon\delta(dx\,dy\,dz)$.

Donc la somme totale des momens des forces qui agissent sur le fluide, sera

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm - S\epsilon\delta(dx\,dy\,dz);$$

& comme il n'y a ici aucune condition particuliere à remplir, on aura l'équation générale de l'équilibre, en égalant simplement cette somme à zéro.

2. On aura donc ainsi pour l'équilibre des fluides élastiques, une équation de la même forme que celle que l'on a trouvée dans la Section précédente (art. 13) pour l'équilibre des fluides incompressibles, puisque dans celle-ci $\delta L = \delta(dx\,dy\,dz)$ (art. 14), ce qui rend le terme $S\lambda\delta L$ provenant de la condition de l'incompressibilité entiérement semblable au terme $S\epsilon\delta(dx\,dy\,dz)$ dû aux momens des forces élastiques.

3. Il s'ensuit de-là que les formules trouvées pour l'équilibre des fluides incompressibles, s'appliquent immédiatement & sans aucune restriction à l'équilibre des fluides

élastiques, en y changeant simplement le coefficient λ en $-\epsilon$, c'est-à-dire, en supposant que la quantité λ prise négativement, exprime la force d'élasticité de chaque élément du fluide. Il n'y aura donc qu'à répéter ici tout ce que nous avons démontré dans la Section précédente, depuis l'article 14 jusqu'à la fin.

4. On suppose ordinairement que l'élasticité est proportionnelle à la densité, ou en général à une fonction quelconque de la densité; on aura donc $\epsilon = -\lambda = \varphi\Delta$ (en nommant Δ la densité); donc la détermination de Δ dépendra de l'équation suivante, (art. 17, Sect. précédente).

$$d.\varphi\Delta = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Cette équation donne

$$\frac{d.\varphi\Delta}{\Delta} = Xdx + Ydy + Zdz;$$

or $\frac{d.\varphi\Delta}{\Delta}$ est une différentielle complette d'une fonction de Δ; donc il faudra aussi que $Xdx + Ydy + Zdz$, soit toujours une différentielle complette; autrement l'équilibre ne sera pas possible. On a donc le cas de l'article 18 de la Section précédente; on aura par conséquent aussi les mêmes conséquences.

Fin de la premiere Partie de la Méchanique.

SECONDE PARTIE.

DE LA MÉCHANIQUE,

OU LA DYNAMIQUE.

SECTION PREMIERE.

Sur les différens Principes de la Dynamique.

LA Dynamique est la Science des forces accélératrices ou retardatrices, & des mouvemens variés qu'elles peuvent produire. Cette Science est due entiérement aux Modernes, & Galilée est celui qui en a jetté les premiers fondemens. Avant lui on n'avoit considéré les forces qui agissent sur les corps que dans l'état d'équilibre; & quoiqu'on ne pût attribuer l'accélération des corps pesans, & le mouvement curviligne des projectiles qu'à l'action constante de la gravité, personne n'avoit encore réussi à déterminer les loix de ces phénomenes journaliers, d'après une cause si simple. Galilée a fait le premier ce pas important, & a ouvert par-là une carriere nouvelle & immense à l'avancement de la Méchanique. Ces découvertes sont exposées & développées dans l'ouvrage intitulé: *Dialoghi delle scienze nuove*, &c. lequel parut pour la

premiere fois à Leyde en 1637; elles ne procurerent pas à Galilée, de son vivant, autant de célébrité que celles qu'il avoit faites sur le système du monde, mais elles sont aujourd'hui la partie la plus solide & la plus réelle de la gloire de ce grand homme.

Les découvertes des satellites de Jupiter, des phases de Vénus, des taches du Soleil, &c, ne demandoient que des télescopes & de l'assiduité; mais il falloit un génie extraordinaire pour démêler les loix de la nature dans des phénomenes que l'on avoit toujours eus sous les yeux, mais dont l'explication avoit néanmoins toujours échappé aux recherches des Philosophes.

Huyghens qui paroît avoir été destiné à perfectionner & completter la plupart des découvertes de Galilée, ajouta à la théorie de l'accélération des graves celles du mouvement des pendules & des forces centrifuges, & prépara ainsi la route à la grande découverte de la gravitation universelle. La Méchanique devint une Science nouvelle entre les mains de Newton, & ses *Principes Mathématiques* qui parurent pour la premiere fois en 1687, furent l'époque de cette révolution.

Enfin l'invention du calcul infinitésimal mit les Géometres en état de réduire à des équations analytiques les loix du mouvement des corps; & la recherche des forces & des mouvemens qui en résultent, est devenue depuis le principal objet de leurs travaux.

Je me suis proposé ici de leur offrir un nouveau moyen de faciliter cette recherche; mais auparavant il ne sera pas inutile d'exposer les principes qui servent de fondement à la Dynamique, & de présenter la suite & la gradation des

idées qui ont le plus contribué à étendre & à perfectionner cette Science.

La théorie des mouvemens variés & des forces accélératrices qui les produisent, est fondée sur ces loix générales, que tout mouvement imprimé à un corps, est par sa nature uniforme & rectiligne, & que différens mouvemens imprimés à la fois ou successivement à un même corps, se composent de maniere que le corps se trouve à chaque instant dans le même point de l'espace où il devroit se trouver en effet par la combinaison de ces mouvemens, s'ils existoient chacun réellement & séparément dans le corps. C'est dans ces deux loix que consistent les Principes connus de la force d'inertie & du mouvement composé. Galilée a apperçu le premier ces deux principes, & en a déduit les loix du mouvement des projectiles, en composant le mouvement oblique, effet de l'impulsion communiquée au corps, avec sa chûte perpendiculaire due à l'action de la gravité.

A l'égard des loix de l'accélération des graves, elles se déduisent naturellement de la considération de l'action constante & uniforme de la gravité, en vertu de laquelle les corps recevant dans des instants égaux des degrés égaux de vîtesse suivant la même direction, la vîtesse totale acquise au bout d'un tems quelconque, doit être proportionnelle à ce tems; & il est clair que ce rapport constant des vîtesses au tems, doit être lui-même proportionnel à l'intensité de la force que la gravité exerce pour mouvoir le corps; de sorte que dans le mouvement sur des plans inclinés, ce rapport ne doit pas être proportionnel à la force absolue de la gravité comme dans le mouvement vertical, mais à sa force relative, laquelle dépend de l'inclinaison du plan,

&

& se détermine par les régles de la Statique; ce qui fournit un moyen facile de comparer entr'eux les mouvemens des corps qui descendent le long des plans différemment inclinés.

Cependant il ne paroît pas que Galilée ait découvert de cette maniere les loix de la chûte des corps pesants. Il a commencé, au contraire, par supposer la notion d'un mouvement uniformément accéléré, dans lequel les vîtesses croissent comme les tems; il en a déduit géométriquement les principales propriétés de cette espece de mouvement, & sur-tout la loi de l'accroissement des espaces en raison des carrés des tems; ensuite il s'est assuré par des expériences, que cette loi a lieu effectivement dans le mouvement des corps qui tombent sur des plans quelconques inclinés. Mais pour pouvoir comparer entr'eux les mouvemens sur différens plans inclinés, il a été obligé d'abord d'admettre ce principe précaire, que les vîtesses acquises en descendant de hauteurs verticales égales, sont aussi toujours égales; & ce n'est que peu avant sa mort, & après la publication de ses Dialogues, qu'il a trouvé la démonstration de ce principe, par la considération de l'action relative de la gravité sur les plans inclinés, démonstration qui a été ensuite insérée dans les autres éditions de cet Ouvrage.

Le rapport constant qui dans les mouvemens uniformément accélérés, doit subsister entre les vîtesses & les tems, ou entre les espaces & les carrés des tems, peut donc être pris pour la mesure de la force accélératrice qui agit continuellement sur le mobile; parce qu'en effet cette force ne peut être estimée que par l'effet qu'elle produit dans le corps, & qui consiste dans les vîtesses engen-

drées, ou dans les eſpaces parcourus dans des tems donnés.

Ainſi il ſuffit, pour cette eſtimation des forces, de conſidérer le mouvement produit dans un tems quelconque, fini ou infiniment petit, pourvu que la force ſoit regardée comme conſtante pendant ce tems; par conſéquent, quel que ſoit le mouvement du corps & la loi de ſon accélération, on pourra toujours déterminer la valeur de la force qui agit ſur lui à chaque inſtant, en comparant la vîteſſe engendrée dans cet inſtant avec la durée du même inſtant, ou l'eſpace qu'elle fait parcourir pendant le même inſtant avec le carré de la durée de cet inſtant; & il n'eſt pas même néceſſaire que cet eſpace ait été réellement parcouru par le corps, il ſuffit qu'il puiſſe être cenſé avoir été parcouru par un mouvement compoſé, puiſque l'effet de la force eſt le même dans l'un & dans l'autre cas, par les principes du mouvement expoſés plus haut.

C'eſt ainſi qu'Huyghens a découvert les loix des forces centrifuges des corps mûs dans des cercles avec des vîteſſes conſtantes, & qu'il a comparé ces forces entr'elles, & avec la force de la peſanteur à la ſurface de la terre, comme on le voit par les démonſtrations qu'il a laiſſées de ſes théorêmes ſur la force centrifuge, publiés en 1673, à la fin du Traité *de Horologio oſcillatorio.*

Mais Huyghens n'a pas été plus loin, & il étoit réſervé à Newton d'étendre cette théorie à des courbes quelconques, & de completter la ſcience des mouvemens variés & des forces accélératrices qui peuvent les engendrer. Cette ſcience ne conſiſte maintenant que dans quelques formules différentielles très-ſimples; mais Newton a conſtamment fait

usage de la méthode géometrique simplifiée par la considération des premieres & dernieres raisons, & s'il s'est quelquefois servi du calcul analitique, c'est uniquement la méthode des séries qu'il a employée, laquelle doit être bien distinguée de la méthode différentielle, quoiqu'il soit facile de les rapprocher, & de les rappeller à un même principe.

Les Géomètres qui ont traité après Newton la théorie des forces accélératrices, se sont presque tous contentés de généraliser ses théorêmes, & de les traduire en expressions différentielles. De-là les différentes formules des forces centrales qu'on trouve dans la plupart des ouvrages de Méchanique, mais dont on ne fait maintenant plus d'usage dans les recherches sur le mouvement des corps animés par des forces quelconques, parce qu'on a une maniere plus simple de mettre ces problêmes en équations.

Si on conçoit que le mouvement d'un corps & les forces qui agissent sur lui soient décomposés suivant trois lignes droites perpendiculaires entr'elles, on pourra considérer séparément les mouvemens & les forces relatives à chacune de ces trois directions. Car à cause de la perpendicularité des directions, il est visible que chacun de ces mouvemens partiels peut être regardé comme indépendant des deux autres, & qu'il ne peut recevoir d'altération que de la part de la force qui agit dans la direction de ce mouvement; d'où l'on peut conclure que ces trois mouvemens doivent suivre, chacun en particulier, les loix des mouvemens rectilignes accélérés ou retardés par des forces données. Or dans le mouvement rectiligne, l'effet de la force accélératrice ne consistant qu'à altérer la vîtesse du corps, cette force doit être mesurée par le rap-

port entre l'accroiſſement ou le décroiſſement de la vîteſſe pendant un inſtant quelconque, & la durée de cet inſtant, c'eſt-à-dire, par la différentielle de la vîteſſe diviſée par celle du tems; & comme la vîteſſe elle-même eſt exprimée dans les mouvemens variés, par la différentielle de l'eſpace diviſée par celle du tems, il s'enſuit que la force dont il s'agit ſera meſurée par la différentielle ſeconde de l'eſpace diviſée par le carré de la différentielle premiere du tems ſuppoſée conſtante. Donc auſſi la différentielle ſeconde de l'eſpace que le corps parcourt ou eſt cenſé parcourir ſuivant chacune des trois directions perpendiculaires, diviſée par le carré de la différentielle conſtante du tems, exprimera la force accélératrice dont le corps doit être animé ſuivant cette même direction; & devra par conſéquent être égalée à la force actuelle qui eſt ſuppoſée agir dans cette direction.

Il n'eſt pas néceſſaire que les trois directions auxquelles on rapporte le mouvement inſtantané du corps, ſoient abſolument fixes, il ſuffit qu'elles le ſoient pendant la durée d'un inſtant. Ainſi dans les mouvemens en ligne courbe, on peut prendre à chaque inſtant ces directions, l'une dans la tangente, & les deux autres dans les perpendiculaires à la courbe: Alors la force accélératrice qui agit ſuivant la tangente, & qu'on nomme force tangentielle, ſera toute employée à altérer la vîteſſe abſolue du corps, & ſera exprimée par l'élément de cette vîteſſe diviſée par l'élément du tems. C'eſt ce qui conſtitue le principe ſi connu des forces accélératrices.

Les forces normales, au contraire, ne feront que changer la direction du corps, & dépendront de la courbure de la ligne

qu'il décrit. En réduiſant ces deux dernieres forces à une ſeule, il faudra que la direction de celle-ci ſoit dans le plan de la courbure, & ſa valeur ſe trouvera exprimée par le carré de la vîteſſe du corps diviſé par le rayon de la développée, c'eſt-à-dire, par le rayon du cercle qui meſure la courbure de la courbe en chaque point, & qu'on nomme cercle *oſculateur*. C'eſt auſſi l'expreſſion qu'Huyghens avoit trouvée pour la force centrifuge des corps qui décrivent des cercles avec des vîteſſes uniformes; & elle eſt générale pour des courbes & des vîteſſes quelconques, en conſidérant à chaque inſtant le corps comme mu dans le cercle oſculateur.

Il eſt cependant beaucoup plus ſimple de rapporter le mouvement du corps à des directions fixes dans l'eſpace. Alors en employant pour déterminer le lieu du corps dans l'eſpace, trois coordonnées rectangles qui ayent ces mêmes directions, les variations de ces coordonnées repréſenteront évidemment les eſpaces parcourus par le corps ſuivant les directions de ces coordonnées; par conſéquent leurs différentielles ſecondes, diviſées par le carré de la différentielle conſtante du tems, exprimeront les forces accélératrices qui doivent agir ſuivant ces mêmes coordonnées; ainſi en égalant ces expreſſions à celles des forces données par la nature du problême, on aura trois équations ſemblables qui ſerviront à déterminer toutes les circonſtances du mouvement. Cette maniere de déterminer le mouvement d'un corps animé par des forces accélératrices quelconques, eſt par ſa ſimplicité préférable à toutes les autres; il paroît que Maclaurin eſt le premier qui l'ait employée dans ſon Traité des Fluxions, imprimé en 1742; elle eſt maintenant univerſellement adoptée.

Par les principes qui viennent d'être exposés, on peut donc déterminer les loix du mouvement d'un corps libre, sollicité par des forces quelconques, pourvu que le corps soit regardé comme un point.

On peut aussi appliquer ces principes à la recherche du mouvement de plusieurs corps qui exercent les uns sur les autres une attraction mutuelle, suivant une loi quelconque qui soit comme une fonction connue des distances; enfin il n'est pas difficile de les étendre aux mouvemens dans des milieux résistans, ainsi qu'à ceux qui se font sur des surfaces courbes données; car la résistance du milieu n'est autre chose qu'une force qui agit dans une direction opposée à celle du mobile; & lorsqu'un corps est forcé de se mouvoir sur une surface donnée, il y a nécessairement une force perpendiculaire à la surface qui l'y retient, & dont la valeur inconnue peut se déterminer d'après les conditions qui résultent de la nature de la même surface.

Mais si on cherche le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres par impulsion ou par pression, soit immédiatement comme dans le choc ordinaire, ou par le moyen de fils ou de leviers inflexibles, auxquels ils soient attachés, ou en général par quelqu'autre moyen que ce soit, alors la question est d'un ordre plus élevé, & les principes précédens sont insuffisans pour la résoudre. Car ici les forces qui agissent sur les corps sont inconnues, & il faut déduire ces forces de l'action que les corps doivent exercer entr'eux, suivant leur disposition mutuelle. Il est donc nécessaire d'avoir recours à un nouveau principe qui serve à déterminer la force des corps en mouvement, eu égard à leur masse & à leur vîtesse.

Ce principe consiste en ce que pour imprimer à une masse donnée une certaine vîtesse suivant une direction quelconque, soit que cette masse soit en repos ou en mouvement, il faut une force dont la valeur soit proportionnelle au produit de la masse par la vîtesse, & dont la direction soit la même que celle de cette vîtesse. Ce produit de la masse d'un corps multipliée par sa vîtesse, s'appelle communément la quantité de mouvement de ce corps, parce qu'en effet c'est la somme des mouvemens de toutes les parties matérielles du corps. Ainsi les forces se mesurent par les quantités de mouvement qu'elles sont capables de produire, & réciproquement la quantité de mouvement d'un corps, est la mesure de la force que le corps est capable d'exercer contre un obstacle, & qui s'appelle la *percussion*. D'où il s'ensuit que si deux corps non élastiques viennent à se choquer directement en sens contraires avec des quantités de mouvement égales, leurs forces doivent se contrebalancer & se détruire, par conséquent les corps doivent s'arrêter & demeurer en repos. Mais si le choc se faisoit par le moyen d'un levier, il faudroit pour la destruction du mouvement des corps, que leurs forces suivissent la loi connue de l'équilibre du levier.

Il paroît que Descartes a apperçu le premier le Principe que nous venons d'exposer, mais il s'est trompé dans son application au choc des corps, pour avoir cru que la même quantité de mouvement absolu devoit toujours se conserver.

Wallis est proprement le premier qui ait eu une idée nette de ce Principe, & qui s'en soit servi avec succès pour découvrir les loix de la communication du mouvement dans

le choc des corps durs ou élaſtiques, comme on le voit dans les Tranſactions Philoſophiques de 1669, & dans la troiſieme Partie de ſon Traité *de Motu*, imprimé en 1671.

De même que le produit de la maſſe & de la vîteſſe exprime la force finie d'un corps en mouvement, ainſi le produit de la maſſe & de la force accélératrice que nous avons vu être repréſentée par l'élément de la vîteſſe diviſé par l'élément du tems, exprimera la force élémentaire ou naiſſante; & cette quantité, ſi on la conſidere comme la meſure de l'effort que le corps peut faire en vertu de la vîteſſe élémentaire qu'il a priſe, ou qu'il tend à prendre, conſtitue ce qu'on nomme *preſſion*; mais ſi on la regarde comme la meſure de la force ou puiſſance néceſſaire pour imprimer cette même vîteſſe, elle eſt alors ce qu'on nomme *force motrice*.

Ainſi des preſſions, ou des forces motrices, ſe détruiront ou ſe feront équilibre ſi elles ſont égales & directement oppoſées, ou ſi étant appliquées à une machine quelconque, elles ſuivent les loix de l'équilibre de cette machine.

Lorſque des corps ſont joints enſemble, de maniere qu'ils ne puiſſent obéir librement aux impulſions reçues, & aux forces accélératrices dont ils ſont animés, ces corps exercent néceſſairement les uns ſur les autres des preſſions continuelles qui altèrent leurs mouvemens, & en rendent la détermination difficile.

Le premier problême & le plus ſimple de ce genre dont les Géomètres ſe ſoient occupés, eſt celui des centres d'oſcillation. Ce problême a été fameux dans le ſiecle dernier & au commencement de celui-ci, par les efforts & les tentatives

tatives que les plus grands Géomètres ont faits pour en venir à bout; & comme c'est principalement à ces tentatives qu'on doit les progrès immenses que la Dynamique a faits depuis, je crois devoir en donner ici une histoire succinte, pour montrer par quels degrés cette Science s'est élevée à la perfection où elle paroît être parvenue dans ces derniers tems.

Les premieres traces des recherches sur les centres d'oscillation, se trouvent dans les Lettres de Descartes. On y voit que le Pere Mersenne lui avoit proposé de déterminer la grandeur que doit avoir un corps de figure quelconque, pour qu'étant suspendu par un point, il fasse ses oscillations dans le même tems qu'un fil de longueur donnée, & chargé d'un seul poids à son extrémité. Descartes observe que cette question a quelque rapport avec celle du centre de gravité, & que de même que dans un corps pesant qui tombe librement, il y a un centre de gravité autour duquel les efforts de la pesanteur de toutes les parties du corps se font équilibre, ensorte que ce centre descend de la même maniere que si le reste du corps étoit anéanti, ou qu'il fût concentré dans le même centre; ainsi dans les corps pesans qui tournent autour d'un axe fixe, il doit y avoir un centre, qu'il appelle *centre d'agitation*, autour duquel les forces *d'agitation* de toutes les parties du corps se contrebalancent de maniere que ce centre étant libre de l'action de ces forces, puisse être mu comme il le seroit si les autres parties du corps étoient anéanties, ou concentrées dans ce même centre; que par conséquent tous les corps dans lesquels ce centre sera également éloigné de l'axe de rotation, feront leur vibration dans le même tems.

D'après cette notion du centre d'agitation, Descartes donne une méthode générale de le déterminer dans des corps de figure quelconque; cette méthode consiste à chercher le centre de gravité des forces d'agitation de toutes les parties du corps, en estimant ces forces par les produits des masses multipliées par les vîtesses qui sont ici proportionnelles aux distances de l'axe de rotation, & en supposant que les parties du corps soient projettées sur le plan qui passe par son centre de gravité & par l'axe de rotation, de maniere qu'elles soient toujours à la même distance de cet axe.

Mais cette supposition n'est pas permise ici, parce que l'effet des forces ne dépend pas seulement de la quantité du mouvement, mais encore de sa direction; aussi la regle de Descartes n'est-elle bonne que lorsque toutes les parties du corps sont réellement ou peuvent être censées placées dans un même plan passant par l'axe de rotation; dans tous les autres cas il ne faut considérer que les mouvemens perpendiculaires au plan passant par l'axe de rotation & par le centre de gravité du corps, & on doit rapporter chaque particule au point où ce plan est rencontré par la direction du mouvement de cette particule, direction qui est toujours perpendiculaire au plan de cette particule & de l'axe de rotation.

Ce défaut de la regle de Descartes fut apperçu par Roberval, & devint le sujet d'une contestation entre ces deux Géomètres, dans laquelle l'avantage paroît être entiérement du côté de ce dernier. Roberval donne des déterminations exactes des centres d'agitation des secteurs & des arcs de cercle mus perpendiculairement à leur plan, & il fait voir l'insuffisance de la regle de son adversaire dans ce cas; mais accoutumé à cacher

ſes méthodes, il ſe contente d'indiquer ces réſultats particuliers, & il eſt impoſſible de juger s'il étoit en poſſeſſion d'une méthode générale.

Au reſte, Roberval remarque avec raiſon, que le centre dont il s'agit n'eſt proprement que le centre de percuſſion, autour duquel les chocs ou les momens de percuſſion ſont égaux, & que pour trouver le vrai centre d'oſcillation d'un pendule peſant, il faut auſſi avoir égard à l'action de la gravité, en vertu de laquelle le pendule ſe meut. Mais cette recherche étant ſupérieure à la Méchanique de ces tems-là, les Géomètres continuerent à ſuppoſer tacitement que le centre de percuſſion étoit le même que celui d'oſcillation, & Huyghens fut le premier qui enviſagea ce dernier centre ſous ſon vrai point de vûe; auſſi crut-il devoir regarder ce problême comme entiérement neuf, & ne pouvant le réſoudre par l'application des loix connues du mouvement, il inventa un principe nouveau, mais indirect, lequel eſt devenu célebre depuis, ſous le nom de *Conſervation des forces vives.*

Un fil conſidéré comme une ligne inflexible, ſans peſanteur & ſans maſſe, étant attaché par un bout à un point fixe & chargé à l'autre bout d'un petit poids qu'on puiſſe regarder comme réduit à un point, forme ce qu'on appelle un pendule ſimple, & la loi des vibrations de ce pendule dépend uniquement de ſa longueur, c'eſt-à-dire, de la diſtance entre le poids & le point de ſuſpenſion. Mais ſi à ce fil on attache encore un ou pluſieurs poids à différentes diſtances du point de ſuſpenſion, on aura alors un pendule compoſé, dont le mouvement devra tenir une eſpece de milieu entre ceux des différens pendules ſimples que l'on auroit, ſi chacun de ces poids étoit ſuſpendu ſeul au fil.

Car la force de la gravité tendant d'un côté à faire descendre tous les poids également dans le même tems, & de l'autre l'inflexibilité du fil les contraignant à décrire dans ce même tems des arcs inégaux & proportionnels à leurs distances du point de suspension, il doit se faire entre ces poids une espece de compensation & de répartition de leurs mouvemens, ensorte que les poids qui sont les plus proches du point de suspension, hâteront les vibrations des plus éloignés, & ceux-ci, au contraire, retarderont les vibrations des premiers. Ainsi il y aura dans le fil un point où un corps étant placé, son mouvement ne seroit ni accéléré, ni retardé par les autres poids, mais seroit le même que s'il étoit seul suspendu au fil. Ce point sera donc le vrai centre d'oscillation du pendule composé, & un tel centre doit se trouver aussi dans tout corps solide de quelque figure que ce soit, qui oscille autour d'un axe horizontal.

Huyghens vit qu'on ne pouvoit déterminer ce centre d'une maniere rigoureuse, sans connoître la loi suivant laquelle les différens poids du pendule composé alterent mutuellement les mouvemens que la gravité tend à leur imprimer à chaque instant; mais au lieu de chercher à déduire cette loi des Principes fondamentaux de la Méchanique, il se contenta d'y suppléer par un Principe indirect, lequel consiste à supposer, que si plusieurs poids attachés, comme l'on voudra, à un pendule descendent par la seule action de la gravité, & que dans un instant quelconque ils soient détachés & séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de sa vîtesse acquise pendant sa chûte, remontera à une telle hauteur que le centre commun de gravité se trouvera remonté à la même hauteur d'où il étoit descendu. A la vérité Huyghens,

n'établit pas ce principe immédiatement, mais il le déduit de deux hypothèſes qu'il croit devoir être admiſes comme des demandes de Méchanique; l'une c'eſt que le centre de gravité d'un ſyſtême de corps peſans, ne peut jamais remonter à une hauteur plus grande que celle d'où il eſt tombé, quelque changement qu'on faſſe à la diſpoſition mutuelle des corps, parce qu'autrement le mouvement perpétuel ne ſeroit plus impoſſible; l'autre c'eſt qu'un pendule compoſé peut toujours remonter de lui-même à la même hauteur d'où il eſt deſcendu librement. Au reſte, Huyghens remarque que le même principe a lieu dans le mouvement des corps peſans liés enſemble d'une maniere quelconque, comme auſſi dans le mouvement des fluides.

On ne ſauroit deviner ce qui a donné à cet Auteur l'idée d'un tel Principe; mais on peut conjecturer qu'il y a été conduit par le théorême que Galilée avoit démontré ſur la chûte des corps peſans, leſquels ſoit qu'ils deſcendent verticalement ou ſur des plans inclinés, acquièrent toujours des vîteſſes capables de les faire remonter aux mêmes hauteurs d'où ils étoient tombés. Ce théorême généraliſé & appliqué au centre de gravité d'un ſyſtême de corps peſans, donne le Principe d'Huyghens.

Quoi qu'il en ſoit, il eſt viſible que ce Principe fournit une équation entre la hauteur verticale, d'où le centre de gravité du ſyſtême eſt deſcendu dans un tems quelconque, & les différentes hauteurs verticales auxquelles les corps qui compoſent le ſyſtême pourroient remonter avec leurs vîteſſes acquiſes, & qui par les théorêmes de Galilée ſont comme les carrés de ces vîteſſes. Or dans un pendule qui oſcille autour d'un axe horiſontal les vîteſſes des différens points

ſont proportionnelles à leurs diſtances de l'axe ; ainſi on peut réduire l'équation à deux ſeules inconnues, dont l'une ſoit la deſcente du centre de gravité du pendule dans un tems quelconque, & dont l'autre ſoit la hauteur à laquelle un point donné de ce pendule pourroit remonter par ſa vîteſſe acquiſe. Mais la deſcente du centre de gravité détermine celle de tout autre point du pendule ; donc on aura une équation entre la hauteur d'où un point quelconque du pendule eſt deſcendu, & celle à laquelle il pourroit remonter par ſa vîteſſe, due à cette chûte. Dans le centre d'oſcillation, ces deux hauteurs doivent être égales, parce que les corps libres peuvent toujours remonter à la même hauteur d'où ils ſont tombés ; & l'équation fait voir que cette égalité ne peut avoir lieu que dans un point de la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation, & paſſant par le centre de gravité du pendule, lequel ſoit éloigné de cet axe de la quantité qui provient en multipliant tous les poids qui compoſent le pendule, par les carrés de leurs diſtances à l'axe, & diviſant la ſomme de ces produits par la maſſe du pendule multipliée par la diſtance de ſon centre de gravité au même axe. Cette quantité exprimera donc la longueur d'un pendule ſimple, dont le mouvement ſeroit égal à celui du pendule compoſé.

Cette théorie d'Huyghens eſt expoſée dans ſon Traité *de Horologio oſcillatorio*, qui parut en 1673, & elle y eſt accompagnée d'un grand nombre de ſavantes applications. Elle n'auroit rien laiſſé à déſirer, ſi elle n'avoit pas été appuyée ſur un Principe précaire ; & il reſtoit toujours à démontrer ce Principe pour la mettre hors de toute atteinte. En 1681 parurent dans le Journal des Savans de Paris, quel-

ques mauvaiſes objections contre cette théorie, auxquelles Huyghens ne répondit que d'une maniere vague & peu ſatisfaiſante. Mais cette conteſtation ayant excité l'attention de Jacques Bernoulli, lui donna occaſion d'examiner à fond la théorie de Huyghens, & de chercher à la rappeller aux premiers principes de la Dynamique. Il ne conſidere d'abord que deux poids égaux attachés à une ligne inflexible & droite, & il remarque que la vîteſſe que le premier poids, celui qui est le plus près du point de ſuſpenſion, acquiert en décrivant un arc quelconque, doit être moindre que celle qu'il auroit acquiſe en décrivant librement le même arc; & qu'en même tems la vîteſſe acquiſe par l'autre poids, doit être plus grande que celle qu'il auroit acquiſe, en parcourant le même arc librement. La vîteſſe perdue par le premier poids s'eſt donc communiquée au ſecond, & comme cette communication ſe fait par le moyen d'un levier mobile autour d'un point fixe, l'Auteur ſuppoſe qu'elle doit ſuivre la loi de l'équilibre des puiſſances appliquées à ce levier; de maniere que la perte de vîteſſe du premier poids ſoit au gain de vîteſſe du ſecond, dans la raiſon réciproque des bras de levier, c'eſt-à-dire, des diſtances au point de ſuſpenſion. De-là & de ce que les vîteſſes réelles des deux poids doivent être elles-mêmes dans la raiſon directe de ces diſtances, on détermine facilement ces vîteſſes, & par conſéquent le mouvement du pendule.

Tel eſt le premier pas qui ait été fait vers la ſolution directe de ce fameux problême. L'idée de rapporter au levier les forces réſultantes des vîteſſes gagnées ou perdues par les poids, eſt très-fine, & donne la clef de la vraie théorie; mais Jacques Bernoulli s'eſt trompé, en conſidérant les

vîteſſes acquiſes pendant un tems quelconque fini, au lieu qu'il n'auroit dû conſidérer que les vîteſſes élémentaires acquiſes pendant un inſtant, & les comparer avec celles que la gravité tend à imprimer pendant le même inſtant. C'eſt ce qu'a fait depuis le Marquis de l'Hopital, dans un Écrit inſéré dans le Journal de Rotterdam de 1690. Il ſuppoſe deux poids quelconques attachés au fil inflexible qui fait le pendule composé, & il établit l'équilibre entre les quantités de mouvement perdues & gagnées par ces poids dans un inſtant quelconque, c'eſt-à-dire, entre les différences des quantités de mouvement que les poids acquierent réellement dans cet inſtant, & celles que la gravité tend à leur imprimer. Il détermine par ce moyen le rapport de l'accélération inſtantanée de chaque poids à celle que la gravité ſeule tend à lui donner, & il trouve le centre d'oſcillation, en cherchant le point du pendule pour lequel ces deux accélérations ſeroient égales. Il étend enſuite ſa théorie à un plus grand nombre de poids, mais il regarde pour cela les premiers comme réunis ſucceſſivement dans leur centre d'oſcillation, ce qui n'eſt plus ſi direct, ni ne peut être admis ſans démonſtration.

Cette analyſe du Marquis de l'Hopital fit revenir Jacques Bernoulli ſur la ſienne, & donna enfin lieu à la premiere ſolution directe & rigoureuſe du problême des centres d'oſcillation, ſolution qui mérite d'autant plus l'attention des Géomètres, qu'elle contient le germe de ce Principe de Dynamique, qui eſt devenu ſi fécond entre les mains de M. d'Alembert.

L'Auteur conſidere les mouvemens que la gravité imprime à chaque inſtant aux corps qui compoſent le pendule, & comme ces corps, à cauſe de leur liaiſon, ne peuvent les ſuivre

ſuivre en entier, il conçoit les mouvemens imprimés comme composés de ceux que les corps peuvent prendre, & d'autres mouvemens qui doivent être détruits, & en vertu deſquels le pendule doit demeurer en équilibre. Le problême ſe trouve ainſi ramené aux principes de la Statique, & ne demande plus que le ſecours de l'analyſe. Jacques Bernoulli trouva par ce moyen des formules générales pour les centres d'oſcillation des corps de figure quelconque, en fit voir l'accord avec le principe de Huyghens, & démontra l'identité des centres d'oſcillation & de percuſſion. Cette ſolution avoit été ébauchée dès 1691 dans les actes de Leipſic, mais elle n'a été donnée d'une maniere complette qu'en 1703, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris.

Pour ne rien laiſſer à deſirer ſur cette hiſtoire du problême du centre d'oſcillation, je devrois rendre compte auſſi de la ſolution que Jean Bernoulli en a donnée enſuite dans les mêmes Mémoires, & qui ayant été trouvée & publiée à peu près en même-tems par Taylor, dans l'ouvrage intitulé: *Methodus incrementorum*, a été l'occaſion d'une vive diſpute entre ces deux Géomètres; mais quelque ingénieuſe que ſoit l'idée ſur laquelle eſt fondée cette nouvelle ſolution, & qui conſiſte à réduire tout d'un coup le pendule composé en un pendule ſimple, en ſubſtituant à ſes différens poids, d'autres poids réunis dans un ſeul point, & dont les maſſes & les peſanteurs ſoient telles qu'il faut pour que leurs accélérations angulaires & leurs momens, par rapport à l'axe de rotation ſoient les mêmes, il faut néanmoins avouer que cette idée n'eſt ni ſi naturelle, ni ſi lumineuſe que celle de l'équilibre entre les mouvemens détruits à laquelle Jacques Bernoulli avoit eu l'art de réduire cette recherche.

On trouve encore dans la *Phoronomie* d'Herman, publiée en 1716, une nouvelle maniere de résoudre le même problême, & qui est fondée sur cet autre principe, que les forces motrices, dont les poids qui forment le pendule sont réellement animés, pour pouvoir être mus conjointement, doivent être équivalentes à celles qui proviennent de l'action de la gravité; ensorte que les premieres étant supposées dirigées en sens contraire, doivent faire équilibre à ces dernieres.

Ce principe présenté de cette maniere, n'est cependant pas assez lumineux pour pouvoir être pris pour un axiome de Méchanique; mais il n'est pas difficile de le démontrer par le moyen de celui de Jacques Bernoulli, dont il est en effet une suite nécessaire.

M. Euler lui a donné depuis une plus grande généralité, & l'a appliqué à la solution de différens problêmes touchant les oscillations des corps flexibles ou inflexibles, dans un Mémoire imprimé en 1740, dans le tome VII des anciens Commentaires de Pétersbourg.

Il seroit trop long de parler des autres problêmes de Dynamique qui ont exercé la sagacité des Géomètres après celui du centre d'oscillation, & avant que l'art de les résoudre fût réduit à des regles fixes. Ces problêmes que MM. Bernoulli, Clairaut, Euler se proposoient entr'eux, se trouvent répandus dans les premiers volumes des Mémoires de Pétersbourg & de Berlin, dans les Mémoires de Paris (années 1736 & 1742), dans les Œuvres de Jean Bernoulli, & dans les Opuscules de M. Euler. Ils consistent à déterminer les mouvemens de plusieurs corps pesans ou non qui se poussent ou se tirent par des fils ou des leviers inflexibles

où ils ſont fixement attachés, ou le long deſquels ils peuvent couler librement, & qui ayant reçu des impulſions quelconques, ſont enſuite abandonnés à eux-mêmes, ou contraints de ſe mouvoir ſur des courbes ou des ſurfaces données.

Le principe de Huyghens étoit preſque toujours employé dans la ſolution de ces problêmes; mais comme ce principe ne donne qu'une ſeule équation, on cherchoit les autres par la conſidération des forces inconnues avec leſquelles on concevoit que les corps devoient ſe pouſſer ou ſe tirer, & qu'on regardoit comme des forces élaſtiques agiſſant également en ſens contraires; l'emploi de ces forces diſpenſoit d'avoir égard à la liaiſon des corps, & permettoit de faire uſage des loix du mouvement des corps libres; enſuite les conditions qui par la nature du problême devoient avoir lieu entre les mouvemens des différens corps, ſervoient à déterminer les forces inconnues qu'on avoit introduites dans le calcul. Mais il falloit toujours une adreſſe particuliere pour démêler dans chaque problême toutes les forces auxquelles il étoit néceſſaire d'avoir égard; ce qui rendoit ces problêmes piquants & propres à exciter l'émulation.

Le traité de Dynamique de M. d'Alembert qui parut en 1743, mit fin à ces eſpeces de défis, en offrant une méthode directe & générale pour réſoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les problêmes de Dynamique que l'on peut imaginer. Cette méthode réduit toutes les loix du mouvement des corps à celles de leur équilibre, & ramene ainſi la Dynamique à la Statique. Nous avons déja remarqué que le principe employé par Jacques Bernoulli dans la recherche du centre d'oſcillation, avoit l'avantage de faire

dépendre cette recherche des conditions de l'équilibre du levier; mais il étoit réservé à M. d'Alembert d'envisager ce principe d'une maniere générale, & de lui donner toute la simplicité & la fécondité dont il pouvoit être susceptible.

Si plusieurs corps tendent à se mouvoir avec des vîtesses & des directions, qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, on peut regarder ces mouvemens comme composés de ceux que les corps prendront réellement, & d'autres mouvemens qui sont détruits; d'où il suit que ces derniers doivent être tels que les corps animés de ces seuls mouvemens se fassent équilibre.

Tel est le Principe que M. d'Alembert a donné, & dont il a fait tant d'heureuses & utiles applications. Ce Principe ne fournit pas immédiatement les équations nécessaires pour la solution des différens problêmes de Dynamique, mais il apprend à les déduire des conditions de l'équilibre. Ainsi en combinant ce Principe avec les Principes ordinaires de l'équilibre du levier, ou de la composition des forces, on peut toujours trouver les équations de chaque problême à l'aide de quelques constructions plus ou moins compliquées. C'est de cette maniere qu'on en a usé jusqu'ici dans l'application du Principe dont il s'agit; mais la difficulté de déterminer les forces qui doivent être détruites, ainsi que les loix de l'équilibre entre ces forces, rend souvent cette application embarrassante & pénible; & les solutions qui en résultent sont presque toujours plus longues que si elles étoient déduites de Principes moins simples & moins directs.

Dans la premiere Partie de ce Traité, le Principe des vîtesses virtuelles nous a conduits à une Méthode analytique

très-ſimple, pour réſoudre toutes les queſtions de Statique. Ce même Principe combiné avec celui que nous venons d'expoſer, fournira donc auſſi une Méthode ſemblable pour les problêmes de Dynamique, & qui aura les mêmes avantages.

Pour ſe former d'abord une idée de cette méthode, on ſe rappellera que le Principe général des vîteſſes virtuelles conſiſte en ce que, lorſqu'un ſyſtême de corps réduits à des points, & animés de forces quelconques eſt en équilibre, ſi on donne à ce ſyſtême un petit mouvement quelconque en vertu duquel chaque corps parcoure un eſpace infiniment petit, la ſomme des forces ou puiſſances multipliées chacune par l'eſpace que le point où elle eſt appliquée parcourt ſuivant la direction de cette puiſſance, eſt toujours égale à zéro.

Si maintenant on ſuppoſe le ſyſtême en mouvement, & qu'on regarde le mouvement que chaque corps a dans un inſtant comme compoſé de deux, dont l'un ſoit celui que le corps aura dans l'inſtant ſuivant, il faudra que l'autre ſoit détruit par l'action réciproque des corps, & par celle des forces motrices dont ils ſont actuellement animés. Ainſi il devra y avoir équilibre entre ces forces & les preſſions ou réſiſtances qui réſultent des mouvemens qu'on peut regarder comme perdus par les corps d'un inſtant à l'autre. D'où il ſuit que pour étendre au mouvement du ſyſtême la formule de ſon équilibre, il ſuffira d'y ajouter les termes dûs à ces dernieres forces.

Or ſi on conſidere, ainſi que nous l'avons déja fait plus haut, les vîteſſes que chaque corps a ſuivant trois directions fixes & perpendiculaires entr'elles, les décroiſſemens

de ces vîteſſes repréſenteront les mouvemens perdus ſuivant les mêmes directions, & leurs accroiſſemens ſeront par conſéquent les mouvemens perdus dans des directions oppoſées. Donc les preſſions réſultantes de ces mouvemens perdus ſeront exprimées en général par la maſſe multipliée par l'élément de la vîteſſe, & diviſée par l'élément du tems, & auront des directions directement contraires à celles des vîteſſes. De cette maniere on pourra exprimer analitiquement les termes dont il s'agit, & l'on aura une formule générale pour le mouvement des corps, laquelle renfermera la ſolution de tous les problêmes de Dynamique, & dont le ſimple développement donnera les équations néceſſaires pour chaque problême, comme on le verra dans la ſuite de ce Traité.

Mais un des plus grands avantages de cette formule, eſt d'offrir immédiatement les équations générales qui renferment les Principes, ou théorêmes connus ſous les noms de *conſervation des forces vives*, de *conſervation du mouvement du centre de gravité*, *de conſervation du moment du mouvement de rotation*, ou *Principe des aires*, & de *principe de la moindre quantité d'action*. Ces Principes doivent être regardés plutôt comme des réſultats généraux des loix de la Dynamique, que comme des principes primitifs de cette Science, mais étant ſouvent employés comme tels dans la ſolution des problêmes, nous croyons devoir en dire auſſi un mot, en indiquant en quoi ils conſiſtent, & à quels Auteurs ils ſont dûs, pour ne rien laiſſer à deſirer dans cette expoſition préliminaire des Principes de la Dynamique.

Le premier des quatre Principes dont nous venons de parler, celui de la conſervation des forces vives, a été trouvé

par Huyghens, mais ſous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne préſentement ; & nous en avons déja parlé à l'occaſion du problême des centres d'oſcillation. Le principe tel qu'il a été employé dans la ſolution de ce problême, conſiſte dans l'égalité entre la deſcente & la montée du centre de gravité de pluſieurs corps peſans qui deſcendent conjointement, & qui remontent enſuite ſéparément, étant réfléchis en haut chacun avec la vîteſſe qu'il avoit acquiſe. Or par les propriétés connues du centre de gravité, le chemin parcouru par ce centre dans une direction quelconque, eſt exprimé par la ſomme des produits de la maſſe de chaque corps & du chemin qu'il a parcouru ſuivant la même direction, diviſée par la ſomme des maſſes. D'un autre côté, par les théorêmes de Galilée, le chemin vertical parcouru par un corps grave eſt proportionnel au carré de la vîteſſe qu'il a acquiſe en deſcendant librement, & avec laquelle il pourroit remonter à la même hauteur. Ainſi le Principe de Huyghens ſe réduit à ce que dans le mouvement des corps peſans, la ſomme des produits des maſſes par les carrés des vîteſſes à chaque inſtant, eſt la même, ſoit que les corps ſe meuvent conjointement d'une maniere quelconque, ou qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales. C'eſt auſſi ce que Huyghens lui-même a remarqué en peu de mots dans un petit Ecrit relatif aux méthodes de Jacques Bernoulli & du Marquis de l'Hopital, pour les centres d'oſcillation.

Juſques-là ce Principe n'avoit été regardé que comme un ſimple théorême de Méchanique ; mais lorſque Jean Bernoulli eut adopté la diſtinction établie par Leibnitz, entre les forces mortes ou preſſions qui agiſſent ſans mouvement actuel, &

les forces vives accompagnées de ce mouvement, ainſi que la meſure de ces dernieres par les produits des maſſes & des carrés des vîteſſes, il ne vit plus dans le Principe en queſtion, qu'une conſéquence de la théorie des forces vives, & une loi générale de la nature, ſuivant laquelle la ſomme des forces vives de pluſieurs corps ſe conſerve la même pendant que ces corps agiſſent les uns ſur les autres par de ſimples preſſions, & eſt conſtamment égale à la ſimple force vive qui réſulte de l'action des forces actuelles qui meuvent les corps. Il lui donna ainſi le nom de *conſervation des forces vives*, & il s'en ſervit avec ſuccès pour réſoudre quelques problêmes qui ne l'avoient pas encore été, & dont il paroiſſoit difficile de venir à bout par des méthodes directes.

Son illuſtre fils, Daniel Bernoulli, a déduit enſuite de ce Principe, les loix du mouvement des fluides dans des vaſes, matiere qui n'avoit été traitée avant lui que d'une maniere vague & arbitraire. Enfin il a rendu ce même principe très-général dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1748, en faiſant voir comment on peut l'appliquer au mouvement des corps animés par des attractions mutuelles quelconques, ou attirés vers des centres fixes par des forces proportionnelles à quelques fonctions des diſtances que ce ſoit.

Le grand avantage de ce Principe eſt de fournir immédiatement une équation finie entre les vîteſſes des corps & les variables qui déterminent leur poſition dans l'eſpace; de ſorte que lorſque par la nature du problême, toutes ces variables ſe réduiſent à une ſeule, cette équation ſuffit pour le réſoudre complettement, & c'eſt le cas de celui des centres d'oſcillation. En général la conſervation des forces vives donne

donne toujours une intégrale premiere des différentes équations différentielles de chaque problême ; ce qui est d'une grande utilité dans plusieurs occasions.

Le second Principe est dû à Newton, qui, au commencement de ses *Principes Mathématiques*, démontre que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs corps n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps quelle qu'elle soit; de sorte que le centre de gravité des corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque, soit par des fils ou des leviers, ou des loix d'attraction, &c, sans qu'il y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur, est toujours en repos, ou se meut uniformément en ligne droite.

M. d'Alembert lui a donné depuis, dans son Traité de Dynamique, une plus grande étendue, en faisant voir que si chaque corps est sollicité par une force accélératrice constante, & qui agisse suivant des lignes paralleles, ou qui soit dirigée vers un point fixe, & agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étoient libres; à quoi on peut ajouter que le mouvement de ce centre est en général le même que si toutes les forces des corps quelles qu'elles soient, y étoient appliquées chacune suivant sa propre direction.

Il est visible que ce Principe sert à déterminer le mouvement du centre de gravité, indépendamment des mouvemens respectifs des corps, & qu'ainsi il peut toujours fournir trois équations finies entre les coordonnées des corps & le tems, lesquelles seront des intégrales des équations différentielles du problême.

Le troisieme Principe est beaucoup moins ancien que les

deux précédens, & paroît avoir été découvert en même-tems par MM. Euler, Daniel Bernoulli, & le Chevalier d'Arcy, mais ſous des formes différentes.

Selon les deux premiers, ce Principe conſiſte en ce que dans le mouvement de pluſieurs corps autour d'un centre fixe, la ſomme des produits de la maſſe de chaque corps, par ſa vîteſſe de circulation autour du centre, & par ſa diſtance au même centre, eſt toujours indépendante de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns ſur les autres, & ſe conſerve la même tant qu'il n'y a aucune action ni aucun obſtacle extérieur. M. Daniel Bernoulli a donné ce Principe dans le premier volume des Mémoires de l'Académie de Berlin, qui a paru en 1746, & M. Euler l'a donné la même année, dans le premier tome de ſes Opuſcules; & c'eſt auſſi le même problême qui les y a conduits, ſçavoir la recherche du mouvement de pluſieurs corps mobiles dans un tube de figure donnée, & qui ne peut que tourner autour d'un point ou centre fixe.

Le principe de M. d'Arcy, tel qu'il l'a donné à l'Académie des Sciences de Paris, dans un Mémoire qui porte la date de 1746, mais qui n'a paru qu'en 1752 dans le Recueil pour 1747, eſt que la ſomme des produits de la maſſe de chaque corps par l'aire que ſon rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe, eſt toujours proportionelle au tems. On voit que ce Principe eſt une généraliſation du beau théorême de Newton, ſur les aires décrites en vertu de forces centripetes quelconques; & pour en appercevoir l'analogie, ou plutôt l'identité avec celui de MM. Euler & Daniel Bernoulli, il n'y a qu'à conſidérer que la vîteſſe de circulation eſt exprimée par l'élément de l'arc circulaire diviſé

par l'élément du tems, & que le premier de ces élémens multiplié par la diſtance au centre, donne l'élément de l'aire décrite autour de ce centre ; d'où l'on voit que ce dernier Principe n'eſt autre choſe que l'expreſſion différentielle de celui de M. d'Arcy.

Cet Auteur a préſenté enſuite ſon Principe ſous une autre forme qui le rapproche davantage du précédent, & qui conſiſte en ce que la ſomme des produits des maſſes, par les vîteſſes & par les perpendiculaires tirées du centre ſur les directions du corps, eſt une quantité conſtante.

Sous ce point de vue il en a fait même une eſpece de Principe métaphyſique, qu'il appelle la *conſervation de l'action*, pour l'oppoſer, ou plutôt pour le ſubſtituer à celui de *la moindre quantité d'action;* comme ſi des dénominations vagues & arbitraires faiſoient l'eſſence des loix de la nature, & pouvoient par quelque vertu ſecrete ériger en cauſes finales, de ſimples réſultats des loix connues de la Méchanique.

Quoi qu'il en ſoit, le Principe dont il s'agit a lieu généralement pour tout ſyſtême de corps qui agiſſent les uns ſur les autres d'une façon quelconque, ſoit par des fils, des lignes inflexibles, des loix d'attraction, &c, & qui ſont de plus ſollicités par des forces quelconques dirigées à un centre fixe, ſoit que le ſyſtême ſoit d'ailleurs entiérement libre, ou qu'il ſoit aſſujetti à ſe mouvoir autour de ce même centre. La ſomme des produits des maſſes par les aires décrites autour de ce centre, & projettées ſur un plan quelconque, eſt toujours proportionnelle au tems; de ſorte qu'en rapportant ces aires à trois plans perpendiculaires entr'eux, on a trois équations différentielles du premier ordre entre le tems &

les coordonnées des courbes décrites par les corps; & c'eſt proprement dans ces équations que conſiſte la nature du Principe dont nous venons de parler.

Je viens enfin au quatrieme Principe que j'appelle de *la moindre action*, par analogie avec celui que feu M. de Maupertuis avoit donné ſous cette dénomination, & que les écrits de pluſieurs Auteurs illuſtres ont rendu enſuite ſi fameux. Ce Principe enviſagé analitiquement, conſiſte en ce que dans le mouvement des corps qui agiſſent les uns ſur les autres, la ſomme des produits des maſſes par les vîteſſes & par les eſpaces parcourus, eſt un *minimum*. L'Auteur en a déduit les loix de la réflexion & de la réfraction de la lumiere, ainſi que celles du choc des corps dans deux Mémoires, l'un à l'Académie des Sciences de Paris en 1744, & l'autre deux ans après à celle de Berlin.

Mais il faut avouer que ces applications ſont trop particulieres pour ſervir à établir la vérité d'un Principe général; elles ont d'ailleurs quelque choſe de vague & d'arbitraire, qui ne peut que rendre incertaines les conſéquences qu'on en pourroit tirer pour l'exactitude même du Principe. Auſſi l'on auroit tort, ce me ſemble, de mettre ce Principe préſenté ainſi ſur la même ligne que ceux que nous venons d'expoſer. Mais il y a une autre maniere de l'enviſager plus générale & plus rigoureuſe, & qui mérite ſeule l'attention des Géomètres. M. Euler en a donné la premiere idée à la fin de ſon Traité des Iſopérimètres, imprimé à Lauſanne en 1744, en y faiſant voir que dans les trajectoires décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vîteſſe multipliée par l'élément de la courbe, fait toujours un *maximum* ou un *minimum*.

Cette propriété que M. Euler n'avoit reconnue que dans

le mouvement des corps isolés, je l'ai étendue depuis au mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque, & il en a résulté ce nouveau Principe général, que la somme des produits des masses par les intégrales des vîtesses multipliées par les élémens des espaces parcourus, est constamment un *maximum* ou un *minimum*.

Tel est le Principe auquel je donne ici, quoique improprement le nom de *moindre action*, & que je regarde non comme un principe métaphysique, mais comme un résultat simple & général des loix de la Méchanique. On peut voir dans le Tome II des Mémoires de Turin, l'usage que j'en ai fait pour résoudre plusieurs problêmes difficiles de Dynamique. Ce principe combiné avec celui de la conservation des forces vives, & développé suivant les regles du calcul des variations, donne directement toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problême; & de-là naît une méthode également simple & générale pour traiter les questions qui concernent le mouvement des corps; mais cette méthode n'est elle-même qu'un corollaire de celle qui fait l'objet de la seconde Partie de cet Ouvrage, & qui a en même-tems l'avantage d'être tirée des premiers Principes de la Méchanique.

SECONDE SECTION.

Formule générale pour le mouvement d'un systême de corps, animés par des forces quelconques.

1. LORSQUE les forces qui agissent sur un systême de corps sont disposées conformément aux loix exposées dans la premiere Partie de ce Traité, ces forces se détruisent mu-

tuellement, & le ſyſtême demeure en équilibre. Mais quand l'équilibre n'a pas lieu, les corps doivent néceſſairement ſe mouvoir, en obéiſſant en tout ou en partie à l'action des forces qui les ſollicitent. La détermination des mouvemens produits par des forces données, eſt l'objet de cette ſeconde Partie.

Nous y conſidérerons principalement les forces accélératrices ou rétardatrices, dont l'action eſt continue, comme celle de la gravité, & qui tendent à imprimer à chaque inſtant une vîteſſe infiniment petite & égale, à toutes les particules de matiere.

Quand ces forces agiſſent librement & uniformément, elles produiſent néceſſairement des vîteſſes qui augmentent comme les tems; & on peut regarder les vîteſſes ainſi engendrées dans un tems donné, comme les effets les plus ſimples de ces ſortes de forces, & par conſéquent comme les plus propres à leur ſervir de meſure. Il faut, dans la Méchanique, prendre les effets ſimples des forces pour connus; & l'art de cette ſcience conſiſte uniquement à en déduire les effets compoſés qui doivent réſulter de l'action combinée & modifiée des mêmes forces.

2. Nous ſuppoſerons donc que l'on connoiſſe pour chaque force accélératrice la vîteſſe qu'elle eſt capable d'imprimer à un mobile en agiſſant toujours de la même maniere, pendant un certain tems, que nous prendrons pour l'unité des tems; & nous entendrons ſimplement par *force accélératrice* cette même vîteſſe. Elle doit s'eſtimer par l'eſpace que le mobile parcourroit dans le même tems, ſi elle étoit continuée uniformément; & on ſait par les théorêmes de Galilée, que cet eſpace eſt toujours double de celui que le corps a parcouru réellement par l'action conſtante de la force accélératrice.

On peut d'ailleurs prendre une force accélératrice connue pour l'unité, & rapporter à celle-là toutes les autres. Alors il faudra prendre pour l'unité des espaces, le double de l'espace que la même force continuée également feroit parcourir dans le tems qu'on veut prendre pour l'unité des tems, & la vîtesse acquise dans ce tems par l'action continue de la même force, sera l'unité des vîtesses. De cette maniere les forces, les espaces, les tems & les vîtesses ne seront que des simples rapports, des quantités mathématiques ordinaires.

Par exemple, si on prend (ce qui est très-naturel) la gravité sous la latitude de Paris pour l'unité des forces accélératrices, & qu'on compte le tems par secondes, on devra prendre alors 30,196 pieds de Paris pour l'unité des espaces parcourus, parce que 15,098 pieds, est la hauteur d'où un corps abandonné à lui-même, tombe dans une seconde sous cette latitude; & l'unité des vîtesses sera celle qu'un corps pésant acquiert en tombant de cette hauteur.

3. Ces notions préliminaires supposées, considérons un systême de corps disposés les uns par rapport aux autres, comme on voudra, & animés par des forces accélératrices quelconques.

Soit m la masse de l'un quelconque de ces corps, regardée comme un point; & soient x, y, z les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position absolue du même corps au bout d'un tems quelconque t. Ces coordonnées sont supposées toujours parallèles à trois axes fixes dans l'espace, & qui se coupent perpendiculairement dans un point nommé l'origine des coordonnées; elles expriment par con-

séquent les distances rectilignes du corps à trois plans passant par les mêmes axes.

Ainsi à cause de la perpendicularité de ces plans, les coordonnées x, y, z représentent les espaces parcourus par le corps en s'éloignant des mêmes plans; par conséquent $\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ représenteront les vîtesses que ce corps a dans un instant quelconque pour s'éloigner de chacun de ces plans-là; & ces vîtesses, si le corps étoit ensuite abandonné à lui-même, demeureroient constantes dans les instans suivans, par les principes fondamentaux de la théorie du mouvement.

4. Soient maintenant P, Q, R, &c, les forces accélératrices, qui dans le même instant sollicitent chaque point de la masse m suivant des directions données, c'est-à-dire, les vîtesses que chacune de ces forces imprimeroit à la masse m, si elles agissoient séparément & également pendant le tems qui est pris pour l'unité. Quelque variable que puisse être l'action de ces forces, on peut néanmoins la regarder comme constante pendant un instant. Par conséquent, comme les vîtesses engendrées par des forces accélératrices constantes, sont proportionelles au tems, il s'ensuit que les vîtesses que les forces P, Q, R, &c, impriment ou tendent à imprimer au corps m pendant l'instant dt, sont exprimées par $P\,dt$, $Q\,dt$, $R\,dt$, &c. & ont les mêmes directions que ces forces.

Donc dans l'instant suivant le corps tendra à se mouvoir à la fois avec les vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $P\,dt$, $Q\,dt$, $R\,dt$, &c; & il prendroit effectivement un mouvement composé

composé de ceux-ci, s'il devenoit libre; mais ce mouvement est altéré par la liaison mutuelle des corps.

Or puisque $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ expriment en général les vîtesses effectives du corps après le tems t, les vîtesses après le tems $t + dt$ seront représentées par $\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt}$. Ainsi le corps aura perdu les vîtesses $P\,dt$, $Q\,dt$, $R\,dt$, &c, & gagné à leur place les vîtesses $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$ tendantes à augmenter les coordonnées x, y, z; ou, ce qui revient au même, il aura perdu à la fois les vîtesses $P\,dt$, $Q\,dt$, $R\,dt$, &c, & les vîtesses $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$ dirigées en sens contraire, c'est-à-dire, suivant les lignes mêmes x, y, z.

Donc aussi les forces accélératrices capables de produire ces différentes vîtesses auront été détruites, & se seront par conséquent fait mutuellement équilibre. Donc enfin il y aura eu équilibre dans le systême, en supposant chacun des corps m qui le composent, animé à la fois par les forces accélératrices P, Q, R, &c, données, & de plus par les forces accélératrices $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}$, $\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}$, $\frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt}$, ou bien (en faisant dt constant) $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, dirigées suivant les lignes x, y, z. D'où l'on voit que les loix du mouvement du systême sont les mêmes que celles de son équilibre, en ajoutant simplement les nouvelles forces accélératrices $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ suivant x, y, z.

5. On pourra donc aussi trouver une formule générale

pour le mouvement, comme on en a trouvé une pour l'équilibre; & cette formule du mouvement ne ſera autre choſe que celle de l'équilibre, en ſuppoſant chaque corps m du ſyſtême tiré à la fois par les forces mP, mQ, mR, &c, ſuivant les directions des forces accélératrices P, Q, R, &c, dont on le ſuppoſe animé, & de plus par les forces $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, ſuivant les directions des coordonnées x, y, z.

Concevons pour cela que la poſition des différens corps du ſyſtême change infiniment peu, enſorte que les coordonnées x, y, z deviennent $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$, les quantités δx, δy, δz étant infiniment petites; il eſt viſible que ces quantités expriment les petits eſpaces que le corps m aura parcourus ſuivant les lignes x, y, z, parce que ces lignes étant perpendiculaires entr'elles, l'eſpace parcouru parallélement à l'une ne dépend que de la variation de celle-ci, & nullement de celle des autres.

Ainſi on aura d'abord $m\frac{d^2x}{dt^2} \times \delta x$, $m\frac{d^2y}{dt^2} \times \delta y$, $m\frac{d^2z}{dt^2} \times \delta z$ pour les *momens* des forces $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$.

6. Conſidérons maintenant les forces accélératrices P, Q, R, &c, comme tendantes à des centres donnés; & ſoient p, q, r, &c, les diſtances de chaque corps m à chacun des centres. Que δp, δq, δr, &c, repréſentent les variations des lignes ou quantités p, q, r, &c, provenantes des variations δx, δy, δz des lignes x, y, z; il eſt clair que ces quantités δp, δq, δr, &c, exprimeront en même-

tems les eſpaces parcourus par le corps m ſuivant les lignes p, q, r, &c. Donc $mP \times \delta p$, $mQ \times \delta q$, $mR \times \delta r$, &c, feront les *momens* des forces mP, mQ, mR, &c, agiſſantes ſuivant ces mêmes lignes, p, q, r, &c.

Or la formule générale de l'équilibre conſiſte en ce que la ſomme des *momens* de toutes les forces du ſyſtême doit être nulle (Part. I, Sect. 2, art. 2); donc on aura la formule cherchée en égalant à zéro la ſomme de toutes les quantités

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$+ m(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.),$$

relatives à chacun des corps du ſyſtême propoſé.

7. Donc ſi on dénote cette ſomme par le ſigne intégral S, qui doit embraſſer tous les corps du ſyſtême, on aura

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.\right)m = 0,$$

pour la formule générale du mouvement d'un ſyſtême quelconque de corps, regardés comme des points, & animés par des forces accélératrices quelconques P, Q, R, &c.

Pour faire uſage de cette formule, on ſuivra les mêmes regles que pour la formule de l'équilibre; ainſi il faudra appliquer ici tout ce qui a été dit dans la ſeconde Section de la premiere Partie, depuis l'article 3 juſqu'à la fin, en obſervant que les différentielles marquées par la note ou caractériſtique δ dans la formule précédente répondent aux différentielles marquées par la caractériſtique ordinaire d dans la formule de l'équilibre, & ſe déterminent par les mêmes regles & les mêmes opérations.

Nous nommerons dans la ſuite ces différentielles marquées par δ, des *variations*, pour les diſtinguer des autres marquées par d qui ſe trouvent dans la même formule, & qui expriment les accroiſſemens ou décroiſſemens ſucceſſifs des variables, à raiſon du tems & du mouvement des corps; tandis que les *variations* ſont relatives au changement arbitraire qu'on introduit dans la poſition inſtantanée des corps, & qui eſt tout-à-fait indépendant de leur mouvement effectif.

8. En général, il faudra commencer par chercher les valeurs de δp, δq, &c, en δx, δy, δz; ce qui eſt facile, parce que, nommant a, b, c les coordonnées rectangles qui déterminent la poſition du centre des forces P, on a

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

d'où l'on tire, en faiſant varier uniquement x, y, z,

$$\delta p = \frac{x-a}{p}\delta x + \frac{y-b}{p}\delta y + \frac{z-c}{p}\delta z,$$

expreſſion qui, comme nous l'avons déja obſervé dans l'endroit cité, peut ſe réduire à cette forme générale & indépendante de la poſition du centre des forces

$$\delta p = \cos\alpha\,\delta x + \cos\beta\,\delta y + \cos\gamma\,\delta z,$$

(en nommant α, β, γ les angles que la direction de la force P fait avec les coordonnées x, y, z) ou bien encore à celle-ci.

$$\delta p = \sin\gamma\,(\cos\epsilon\,\delta x + \sin\epsilon\,\delta y) + \cos\gamma\,\delta z,$$

ϵ étant l'angle que cette direction projetée ſur le plan des

x, y fait avec l'axe des x. Et ainſi des autres variations δq, δr, &c.

De cette maniere les termes $P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ &c, ſe réduiront à cette forme $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$; & les quantités X, Y, Z ſeront les valeurs des trois forces paralleles aux axes des coordonnées x, y, z, & équivalentes à toutes les forces P, Q, R, &c, comme nous l'avons démontré dans l'article 5 de la Section cinquieme de la premiere Partie.

Enſuite en ayant égard aux équations de condition, données par la nature du ſyſtême propoſé, entre les coordonnées des différens corps, on réduira les *variations* de ces coordonnées au plus petit nombre poſſible, enſorte que les variations reſtantes ſoient tout-à-fait indépendantes entr'elles & abſolument arbitraires. Alors on égalera à zéro la ſomme de tous les termes affectés de chacune de ces dernieres variations; & l'on aura toutes les équations néceſſaires pour la détermination du mouvement du ſyſtême.

9. Si le ſyſtême dont on cherche le mouvement eſt un corps continu, & d'une figure invariable comme les corps ſolides, ou variable comme les corps flexibles & les fluides; alors dénotant par m la maſſe entiere du corps, & par dm l'un quelconque de ſes élémens, c'eſt-à-dire, une particule quelconque du corps, on conſidérera ce corps comme un aſſemblage ou ſyſtême d'une infinité de corpuſcules dm, animés chacun par les forces accélératrices P, Q, R, &c; & il n'y aura qu'à mettre dans la formule générale de l'article 7, dm à la place de m, & en même-tems regarder le ſigne S comme un ſigne d'intégration relatif à toute l'étendue du corps, c'eſt-à-dire, à la poſition inſtantanée de toutes

ſes particules, mais indépendant de la poſition ſucceſſive de chaque particule.

10. En général, il faut remarquer relativement aux *variations*, qu'elles ne ſe rapportent qu'à l'eſpace & non à la durée, enſorte que dans les différentiations marquées par δ la variable t, qui repréſente le tems devra toujours être regardée comme conſtante. Or il peut arriver ſuivant les circonſtances du problême que les équations de condition renferment elles-mêmes le tems t, auquel cas elles ſeront, à proprement parler, variables d'un inſtant à l'autre; alors quelques-unes des coordonnées ſe trouveront exprimées en fonction des autres coordonnées & de la variable t; & il faudra avoir égard à la variabilité de t dans les différentiations marquées par d, mais on ſuppoſera t invariable dans les différentiations marquées par δ.

La même ſuppoſition devra auſſi avoir lieu relativement au ſigne intégral S qui ne ſe rapporte qu'à l'étendue même du corps dans chaque inſtant.

TROISIEME SECTION.

Propriétés générales du mouvement déduites de la formule précédente.

1. CONSIDÉRONS un ſyſtême de corps diſpoſés les uns par rapport aux autres, & liés enſemble comme l'on voudra, mais ſans qu'il y ait aucun point ou obſtacle fixe qui gêne leur mouvement; il eſt évident que dans ce cas les condi-

tions du systême ne peuvent regarder que la position respective des corps entr'eux; par conséquent les équations de condition ne pourront contenir d'autres fonctions des coordonnées que les expressions des distances mutuelles des corps.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un corps quelconque déterminé du systême, tandis que x, y, z représentent en général les coordonnées d'un autre corps quelconque. Faisons, ce qui est toujours permis,

$$x = x' + \xi,\ y = y' + \eta,\ z = z' + \zeta;$$

il est visible que les quantités x', y', z' n'entreront point dans les expressions des distances mutuelles des corps, mais que ces distances ne dépendront que des différentes quantités ξ, η, ζ, qui expriment proprement les coordonnées des différens corps, rapportés à celui qui répond à x', y', z'; par conséquent les équations de condition du systême seront entre les seules variables ξ, η, ζ, & ne renfermeront point x', y', z'.

Donc si dans la formule générale du mouvement on substitue pour δx, δy, δz leurs valeurs $\delta x' + \delta \xi$, $\delta y' + \delta \eta$, $\delta z' + \delta \zeta$, ces variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ seront indépendantes de toutes les autres, & arbitraires en elles-mêmes; ainsi il faudra égaler séparément à zéro la totalité des termes affectés de chacune de ces variations; ce qui donnera trois équations générales & indépendantes de la constitution particuliere du systême.

2. En mettant dans la formule générale de l'article 7 de la Section précédente, à la place de la quantité $P\delta p + Q\delta q$

$+ R\delta r +$ &c, ſa transformée $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ (art. 8, Sect. citée), cette formule devient

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right)m\delta x + S\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right)m\delta y$$
$$+ S\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right)m\delta z = 0;$$

Et de-là on tire ſur le champ ces trois équations générales,

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right)m = 0,$$

$$S\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right)m = 0,$$

$$S\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right)m = 0,$$

leſquelles auront toujours lieu dans le mouvement d'un ſyſtême quelconque de corps, lorſque le ſyſtême eſt entiérement libre.

3. Suppoſons maintenant que le corps auquel répondent les coordonnées x', y', z' ſoit placé dans le centre de gravité de tout le ſyſtême. On aura, par les propriétés connues de ce centre (Part. 1, Sect. 3, art. 12), les équations $S\xi m = 0$, $S\eta m = 0$, $S\zeta m = 0$; leſquelles, en différentiant par rapport à t, donneront celles-ci,

$$S\,\frac{d^2 \xi}{dt^2}\,m = 0,\ S\,\frac{d^2 y}{dt^2}\,m = 0,\ S\,\frac{d^2 \zeta}{dt^2}\,m = 0.$$

Donc on aura $S\,\frac{d^2 x}{dt^2}\,m = S\,\frac{d^2 x'}{dt^2}\,m = \frac{d^2 x'}{dt^2}\,Sm$, parce que x' ayant la même valeur pour tous les corps, eſt indépendante du ſigne S; on aura pareillement $S\,\frac{d^2 y}{dt^2}\,m = \frac{d^2 y'}{dt^2}\,Sm$, & $S\,\frac{d^2 z}{dt^2}\,m = \frac{d^2 z'}{dt^2}\,Sm$. Ainſi les trois équations

tions de l'article précédent prendront cette forme plus ſimple.

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} Sm + SXm = 0,$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} Sm + SYm = 0,$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} Sm + SZm = 0.$$

Ces équations ſerviront à déterminer le mouvement du centre de gravité de tous les corps, indépendamment du mouvement particulier de chacun d'eux; & il eſt évident que le mouvement de ce centre ne dépendra point de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns ſur les autres, mais ſeulement des forces accélératrices qui ſollicitent chaque corps. C'eſt en quoi conſiſte le principe général de la *conſervation du mouvement du centre de gravité.*

4. On voit au reſte que les équations pour le mouvement du centre de gravité ſont les mêmes que celles du mouvement d'un ſeul corps qui ſeroit animé à la fois par toutes les forces accélératrices qui agiſſent ſur les différens corps du ſyſtême. En effet, ſi on conçoit que tous ces corps ſoient réunis en un point qui réponde aux coordonnées x', y', z'; on a alors dans la formule générale $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, & égalant à zéro la totalité des termes affectés de chacune des trois variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, on aura les mêmes équations que ci-deſſus.

Et de-là réſulte ce théorême général, que *le mouvement du centre de gravité d'un ſyſtême libre de corps diſpoſés les uns par rapport aux autres, comme l'on voudra, eſt toujours le même que ſi les corps étoient toujours réunis dans un ſeul point, &*

qu'en même tems chacun d'eux fût animé des mêmes forces accélératrices que dans leur état naturel.

5. Considérons ici le mouvement d'un systême quelconque autour d'un point fixe, soit que ce point appartienne lui-même au systême ou non; & pour cela employons d'abord, ainsi que nous l'avons fait dans la premiere Partie (Sect. 3, art. 5), un rayon vecteur ρ avec l'angle φ décrit par ce rayon sur le plan des coordonnées x & y, à la place de ces mêmes coordonnées, en conservant d'ailleurs la troisieme coordonnée z perpendiculaire à ces deux-là. On aura de cette maniere $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, & différentiant, $\delta x = \cos \varphi \, \delta \rho - y \delta \varphi$, $\delta y = \sin \varphi \, \delta \rho + x \delta \varphi$.

Soit pour un corps quelconque déterminé du systême, φ' la valeur de l'angle φ; & qu'on fasse en général pour chacun des autres corps $\varphi = \varphi' + \psi$. On peut prouver, comme dans l'endroit cité, que si le systême a la liberté de tourner autour de l'axe des z, les variations de l'angle φ' seront indépendantes de celles de toutes les autres variables.

Dans ce cas donc la totalité des termes affectés de $\delta \varphi'$ dans la formule générale du mouvement devra être séparément égale à zéro; ce qui donnera une équation générale & indépendante de la constitution particuliere du systême; & pour avoir cette équation, il est clair qu'il n'y aura qu'à mettre les quantités $-y \delta \varphi'$ & $x \delta \varphi'$ à la place de δx & δy dans la formule générale donnée ci-dessus (art. 2), & faire ensuite une équation séparée des différens termes affectés de $\delta \varphi'$.

6. Cette équation sera donc

$$S\left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} + x Y - y X\right) m = 0,$$

& elle aura lieu en général pour quelque ſyſtême de corps que ce ſoit, pourvu qu'il ait la liberté de tourner autour de la ligne fixe qui ſert d'axe aux coordonnées z.

Et comme ce qui eſt relatif à l'un des trois axes des coordonnées, peut ſe rapporter également à chacun des deux autres, on trouvera d'une maniere ſemblable, par rapport à l'axe des coordonnées y, ſi le ſyſtême a la liberté de tourner autour de cet axe, l'équation

$$S\left(x\,\frac{d^2 z}{dt^2}-z\,\frac{d^2 x}{dt^2}+xZ-zX\right)m=0.$$

Enfin on aura auſſi, relativement à l'axe des coordonnées x, en ſuppoſant que le ſyſtême ait la liberté de tourner autour de cet axe, l'équation

$$S\left(y\,\frac{d^2 z}{dt^2}-z\,\frac{d^2 y}{dt^2}+yZ-zY\right)m=0.$$

Ces trois équations auront donc lieu à la fois, lorſque le ſyſtême aura la liberté de tourner autour de chacun des trois axes; c'eſt-à-dire, toutes les fois que le ſyſtême ſera diſpoſé de maniere qu'il puiſſe pirouetter librement en tout ſens autour du point fixe où eſt l'origine des coordonnées; car nous avons vu dans la premiere Partie, (Sect. 3, art. 7), que tout mouvement de rotation autour d'un point fixe, peut toujours ſe réſoudre en trois autres autour de trois axes paſſant par ce point.

Pour ſe former une idée plus nette de ces équations, on remarquera 1° que les quantités $x\,d^2y - y\,d^2x$, $x\,d^2z - z\,d^2x$, $y\,d^2z - z\,d^2y$ ne ſont autre choſe que les différentielles de celles-ci, $x\,dy - y\,dx$, $x\,dz - z\,dx$, $y\,dz - z\,dy$, leſquelles expriment le double des ſecteurs élémentaires décrits par le

corps m ſur les plans des x, y, des x, z & des y, z, c'eſt-à-dire, ſur les plans perpendiculaires aux axes des z, des y & des x; en effet, ſi dans $xdy - ydx$, on ſubſtitue pour x & y les valeurs ρ coſ φ, ρ ſin φ, il vient $\rho^2 d\varphi$, double de l'aire compriſe entre le rayon vecteur ρ & le rayon conſécutif qui fait avec lui l'angle élémentaire $d\varphi$. 2°. Que les quantités X, Y, Z repréſentent les forces qui ſollicitent chaque corps m ſuivant les directions des coordonnées x, y, z, & qui réſultent de toutes les forces P, Q, R, &c, agiſſantes ſur ce corps ſuivant des directions quelconques (art. 8, Sect. 2); & qu'ainſi les quantités $xY - yX$, $xZ - zX$, $yZ - zY$, expriment les momens des forces qui tendent à faire tourner le corps, autour de chacun des trois axes des coordonnées z, y, x; en prenant le mot de *moment*, dans le ſens ordinaire, pour le produit de la force & de la perpendiculaire menée ſur ſa direction.

7. Si le ſyſtême n'étoit animé par aucune force accélératrice, ou s'il l'étoit ſeulement par des forces quelconques, tendantes toutes au point que nous avons pris pour l'origine des coordonnées; alors les quantités $xY - yX$, $xZ - zZ$, $yZ - zY$, ſeroient nulles. Car dans le premier cas, les quantités X, Y, Z, ſeroient elles-mêmes nulles; & dans le ſecond, ces quantités ſeroient de la forme $\frac{Px}{p}$, $\frac{Py}{p}$, $\frac{Pz}{p}$, (art. 8, Section ſeconde) en nommant P la force tendante au centre, & faiſant les coordonnées a, b, c nulles, parce que le centre des forces eſt ſuppoſé tomber dans l'origine des coordonnées.

Les trois équations de l'article 6 deviendront alors,

$$S\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)m=0,$$

$$S\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)m=0,$$

$$S\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)m=0,$$

lesquelles étant intégrées par rapport à la variable t, donneront en prenant trois constantes arbitraires A, B, C.

$$S\left(\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}\right)m=A,$$

$$S\left(\frac{x\,dz-z\,dx}{dt}\right)m=B,$$

$$S\left(\frac{y\,dz-z\,dy}{dt}\right)m=C.$$

Ces dernieres équations renferment évidemment le Principe des *aires* dont nous avons parlé dans la premiere Section.

8. Si le systême est libre, c'est-à-dire, qu'il n'y ait aucun point fixe, on peut prendre l'origine des coordonnées x, y, z, par-tout où l'on veut; par conséquent les propriétés des aires & des momens que nous venons de démontrer, auront lieu dans ce cas par rapport à un point fixe quelconque pris à volonté dans l'espace. Mais je vais prouver qu'elles auront lieu également par rapport au centre de gravité de tout le systême, soit que ce centre soit fixe ou non.

Pour cela il n'y a qu'à substituer dans les trois équations de l'article 6, pour x, y; z, les quantités $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$ (art. 1), en rapportant, comme dans l'article 3, les coordonnées x', y', z' au centre de gravité du systême.

Par ces ſubſtitutions, la premiere des équations en queſtion deviendra d'abord

$$\left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2}\right) Sm + x' SYm - y' SXm$$
$$+ x' S \frac{d^2 y}{dt^2} m - y' S \frac{d^2 \xi}{dt^2} m + \frac{d^2 y'}{dt^2} S\xi m - \frac{d^2 x'}{dt^2} S y m$$
$$+ S\left(\xi \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Y - y X\right) m = 0.$$

Enſuite par les équations données dans le même article 3, elle ſe réduira à

$$S\left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X\right) m = 0.$$

Les deux autres équations de l'article 6 ſe réduiront de même à celles-ci,

$$S\left(\xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X\right) m = 0,$$
$$S\left(\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y\right) m = 0.$$

On voit que ces trois équations ſont ſemblables à celles de ce même article 6, & que toute la différence conſiſte en ce qu'à la place des coordonnées x, y, z partant d'un point fixe, il y a les coordonnées ξ, η, ζ, dont l'origine eſt dans le centre de gravité du ſyſtême. D'où il ſuit que les mêmes propriétés qui avoient lieu par rapport au point fixe, ont auſſi lieu par rapport à ce centre.

9. En général, de quelque maniere que les différens corps du ſyſtême ſoient diſpoſés ou liés entr'eux, pourvu que cette diſpoſition ſoit indépendante du tems, c'eſt-à-dire, que les équations de condition entre les coordonnées ne

renferment point la variable t; il eſt clair qu'on pourra toujours, dans la formule générale du mouvement, ſuppoſer les variations δx, δy, δz, égales aux différentielles dx, dy, dz, qui repréſentent les eſpaces effectifs parcourus par les corps dans l'inſtant dt, tandis que les variations dont nous parlons doivent repréſenter les eſpaces quelconques, que les corps pourroient parcourir dans le même inſtant, eu égard à leur diſpoſition mutuelle.

Cette ſuppoſition n'eſt que particuliere, & ne peut fournir par conſéquent qu'une ſeule équation; mais étant indépendante de la forme du ſyſtême, elle a l'avantage de donner une équation générale pour le mouvement de quelque ſyſtême que ce ſoit.

Subſtituant donc dans la formule générale de l'article 7 de la Section précédente à la place de δx, δy, δz, les différentielles ordinaires dx, dy, dz, & par conſéquent auſſi, au lieu de δp, δq, δr, &c., les différentielles correſpondantes dp, dq, dr, &c, on aura

$$S\left(\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c\right)m = 0,$$

équation générale pour quelque ſyſtême de corps que ce ſoit.

10. Lorſque la quantité $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c$, eſt intégrable, & elle l'eſt toujours quand les forces accélératrices tendent à des centres fixes, ou aux corps mêmes du ſyſtême, & ſont proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances, ce qui eſt proprement le cas de la nature; alors donc, ſi on nomme Π l'intégrale de cette quantité, enſorte que l'on ait $d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c$, l'équation précédente devient

$$S\left(\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + d^2z\,d^2z}{dt^2} + d\Pi\right)m = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + \Pi\right)m = F,$$

en déſignant par F une conſtante arbitraire & égale à la valeur du premier membre de l'équation dans un inſtant donné.

Cette derniere équation renferme le principe connu ſous le nom de *Conſervation des forces vives*. En effet, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ étant le carré de l'eſpace que le corps parcourt dans l'inſtant dt, $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ ſera le carré de ſa vîteſſe, & $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}m$ ſa force vive. Donc $S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)m$ ſera la ſomme des forces vives de tous les corps, ou la force vive de tout le ſyſtême ; & on voit par l'équation dont il s'agit, que cette force vive eſt égale à la quantité $2F - 2S\Pi m$, laquelle dépend ſimplement des forces accélératrices qui agiſſent ſur les corps, & eſt la même pour des corps libres que pour des corps liés enſemble d'une maniere quelconque, pourvu que leur liaiſon ne varie point avec le tems.

11. En nommant u la vîteſſe du corps m, on a $u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, & l'équation précédente devient . . . . $S\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right)m = F$, laquelle étant différentiée par rapport à la caractériſtique δ, donne $S(u\,\delta u + \delta\Pi)m = 0$.

Or Π étant une fonction finie des variables p, q, r, &c, telle que $d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c, il eſt clair qu'on

qu'on aura également en changeant d en δ, $\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ &c. Donc on aura $S(u\delta u + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\, m = 0$; par conséquent

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\, m = - Su\delta u \times m.$$

Et cette équation aura toujours lieu, pourvu que $Pdp + Qdq + Rdr + \&c$, soit une quantité intégrable, & que la liaison des corps soit indépendante du tems; elle cesseroit d'être vraie si l'une de ces conditions n'avoit pas lieu.

12. Qu'on substitue maintenant la valeur précédente dans la même formule générale de l'article 7 de la seconde Section, elle deviendra,

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - u\delta u\right) m = 0.$$

Or $d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z$ est $= d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - dxd\delta x - dyd\delta y - dzd\delta z$. Mais parce que les caractéristiques d & δ représentent des différences ou variations tout-à-fait indépendantes les unes des autres, il est aisé de concevoir, que $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$ doivent être la même chose que δdx, δdy, δdz, ainsi qu'il a déja été remarqué dans la premiere Partie (art. 16, Sect. 4). D'ailleurs il est visible que $dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz = \frac{1}{2}\delta.(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Donc on aura $d^2x\delta x + d^2\delta y + d^2z\delta z = d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - \frac{1}{2}\delta.(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

Soit s l'espace ou l'arc curviligne décrit par le corps m dans le tems t; on au $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, &

$dt = \frac{ds}{u}$. Donc $d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - ds\delta ds$; & de-là $\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - \frac{u^2\delta ds}{ds}$.

Ainsi la formule générale dont il s'agit deviendra

$$S\left(\frac{d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - \frac{u^2\delta ds}{ds} - u\delta u\right)m = 0,$$

ou, en multipliant tous les termes par $dt = \frac{ds}{u}$, & remarquant que $u\delta ds + ds\delta u = \delta.(uds)$,

$$S\left(\frac{d.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt} - \delta.(uds)\right)m = 0.$$

Et comme le signe intégral S n'a aucun rapport aux signes différentiels d & δ, on peut faire sortir ceux-ci hors de celui-là; & alors l'équation précédente prendra cette forme,

$$\frac{d.S(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt} - \delta.Smuds = 0.$$

Intégrons par rapport au signe différentiel d, & dénotons cette intégration par le signe intégral ordinaire $\int$, nous aurons

$$\frac{S(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt} - \int\delta.Smuds = \text{const.}$$

Or le signe $\int$ dans l'expression $\int\delta.Smuds$ ne pouvant regarder que les variables u & s, & n'ayant aucune relation avec les signes S & δ, il est clair que cette expression est la même chose que celle-ci, $\delta.Sm\int uds$. Et si on suppose que dans les points où commencent les intégrales $\int uds$ on ait $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, il faudra que la constante

arbitraire ſoit nulle, parce que le premier membre de l'équation devient nul dans ces points. Ainſi on aura dans ce cas

$$\delta . S m \int u\, d s = \frac{S(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)\, m}{dt}.$$

Donc ſi on ſuppoſe de plus que les variations δx, δy, δz ſoient auſſi nulles pour les points où les intégrales $\int u\, d s$ finiſſent, on aura alors $\delta . S m \int u\, d s = 0$; c'eſt-à-dire, que la variation de la quantité $S m \int u\, d s$ ſera nulle; par conſéquent cette quantité ſera un *maximum* ou un *minimum*.

13. De-là réſulte donc ce théorême général, que dans le mouvement d'un ſyſtême quelconque de corps animés par des forces mutuelles d'attraction, ou tendantes à des centres fixes, & proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances, les courbes décrites par les différens corps, & leurs vîteſſes, ſont néceſſairement telles que la ſomme des produits de chaque maſſe par l'intégrale de la vîteſſe multipliée par l'élément de la courbe eſt un *maximum* ou un *minimum*, pourvu que l'on regarde les premiers & les derniers points de chaque courbe comme données, en ſorte que les variations des coordonnées répondantes à ces points ſoient nulles. C'eſt le théorême dont nous avons parlé à la fin de la premiere Section, ſous le nom de Principe de la moindre action.

Mais ce théorême ne contient pas ſeulement une propriété très-remarquable du mouvement des corps, il peut ſervir à déterminer ce mouvement. En effet, puiſque la formule $S m \int u\, d s$ doit être un *maximum* ou un *minimum*, il n'y a qu'à chercher par la méthode des *variations*, les conditions qui peuvent la rendre telle; & en employant

l'équation générale de la conservation des forces vives, on trouvera toujours toutes les équations nécessaires pour connoître le mouvement de chaque corps; car pour le *maximum* ou *minimum*, il faut que la variation soit nulle, & que par conséquent on ait $\delta . Sm\int u\,ds = 0$; & de-là en pratiquant dans un ordre rétrograde les opérations exposées ci-dessus, on retrouvera la même formule générale d'où l'on étoit parti.

14. Pour rendre cette méthode plus sensible, nous allons l'exposer ici en peu de mots. La condition du *maximum* ou *minimum* donne en général $\delta . Sm\int u\,ds = 0$, & faisant passer le signe différentiel δ sous les signes S & $\int$ (ce qui est évidemment permis par la nature de ces différens signes), on aura l'équation $Sm\int\delta(u\,ds) = 0$, ou bien $Sm\int(ds\,\delta u + u\,\delta ds) = 0$.

Je considere d'abord la partie $Sm\int ds\,\delta u$, & mettant pour ds sa valeur $u\,dt$, elle devient $Sm\int u\,\delta u\,dt$, ou changeant l'ordre des signes S & $\int$ qui sont absolument indépendans l'un de l'autre, $\int dt\,Sm u\,\delta u$. Or l'équation générale du principe des forces vives donne (art. 11) $Su^2 m = 2F - 2S.\Pi m$, $d\Pi$ étant $= P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c; donc différentiant suivant δ, on aura $Su\,\delta u\,m = -S\,\delta\Pi\,m = -S(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r +$ &c,$)\,m$, parce que Π étant supposée une fonction algébrique de p, q, r, &c, la différentielle $\delta\Pi$ est la même que la $d\Pi$ en changeant seulement d en δ. Ainsi la quantité $Sm\int ds\,\delta u$ se réduira à cette forme,

$$-\int dt\,S(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c,)\,m.$$

Je considere ensuite l'autre partie $Sm\int u\,\delta ds$, & j'y sub-

ſtitue à la place de ds ſa valeur exprimée par des coordonnées rectangles, ou par d'autres variables quelconques. En employant les coordonnées rectangles x, y, z, on a $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; donc différentiant ſuivant δ, $\delta ds = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds}$, ou bien, en tranſpoſant les ſignes d, δ, & écrivant $d\delta$ au lieu de δd (ce qui eſt toujours permis à cauſe de l'indépendance de ces ſignes, & forme le premier principe fondamental de la méthode des variations), $\delta ds = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$; on aura ainſi en ſubſtituant cette valeur, & mettant dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$\int u\,\delta ds = \int \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{dt}.$$

Comme il ſe trouve ici ſous le ſigne intégral $\int$, des différentielles des variations δx, δy, δz, il faut les faire diſparoître par l'opération connue des intégrations par parties; & c'eſt en quoi conſiſte le ſecond Principe fondamental de la méthode des variations. On transformera donc la quantité $\int \frac{dx\,d\delta x}{dt}$ en celle-ci qui lui eſt équivalente $\frac{dx}{dt}\,\delta x - \int \delta x\,d.\frac{dx}{dt}$; & ſuppoſant que les deux termes de la courbe ſoient donnés, enſorte que les coordonnées qui répondent au commencement & à la fin de l'intégrale, ne varient point; on aura ſimplement $\int \frac{dx\,d\delta x}{dt} = -\int \delta x\,d.\frac{dx}{dt}$. On trouvera de même $\int \frac{dy\,d\delta y}{dt} = -\int \delta y\,d.\frac{dy}{dt}$, & pareillement $\int \frac{dz\,d\delta z}{dt} = -\int \delta y\,d.\frac{dz}{dt}$; de ſorte qu'on aura cette trans-

formée

$$\int u\delta ds = -\int\left(\delta x d.\frac{dx}{dt} + \delta y d.\frac{dy}{dt} + \delta z d.\frac{dz}{dt}\right).$$

Donc la quantité $Sm\int u\delta ds$ deviendra, en transposant, ce qui est toujours permis, les signes S & $\int$,

$$-\int S\left(\delta x d.\frac{dx}{dt} + \delta y d.\frac{dy}{dt} + \delta z d.\frac{dz}{dt}\right) m.$$

L'équation du *maximum* ou *minimum* sera donc

$$\int(dt\, S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)m$$
$$+ S\left(\delta x d.\frac{dx}{dt} + \delta y d.\frac{dy}{dt} + \delta z d.\frac{dz}{dt}\right)m\big) = 0,$$

laquelle devant avoir lieu en général pour toutes les variations possibles, il faudra que la quantité sous le signe $\int$ soit nulle à chaque instant; on aura ainsi l'équation indéfinie

$$dt\, S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)m$$
$$+ S\left(\delta x d.\frac{dx}{dt} + \delta y d.\frac{dy}{dt} + \delta z d.\frac{dz}{dt}\right)m = 0,$$

équation qui est la même chose que la formule générale du mouvement (art. 7, Sect. premiere), & qui donnera par conséquent, comme celle-ci, toutes les équations nécessaires pour la solution du problême.

15. Au lieu des coordonnées x, y, z, on peut employer d'autres indéterminées quelconques, & tout se réduit à exprimer l'élément de l'arc ds en fonction de ces indéterminées. Qu'on prenne, par exemple, le rayon ou la distance rectiligne à l'origine des coordonnées, qu'on nommera ρ, avec deux angles, dont l'un ψ soit l'inclinaison de ce rayon sur le plan des x & y, & l'autre φ soit l'angle de la projection

du même rayon sur ce plan avec l'axe des x; on aura $z = \rho \sin \psi$, $y = \rho \cos \psi \sin \varphi$, $x = \rho \cos \psi \cos \varphi$, & de-là on trouvera $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\psi^2 + \cos \psi^2 d\varphi^2)$, expression qu'on pourroit aussi trouver directement par la Géométrie. Différentiant donc par δ, & changeant δd en $d\delta$, on aura $ds\,\delta ds = d\rho\, d\delta\rho + \rho(d\psi^2 + \cos. \psi^2 d\varphi)\delta\rho + \rho^2 (d\psi\, d\delta\psi - \sin \psi \cos \psi\, d\varphi^2\, \delta\psi + \cos \psi^2\, d\varphi\, d\delta\varphi)$; d'où en divisant par $dt = \frac{ds}{u}$, & intégrant, on aura

$$\int u\,\delta ds = \int \frac{d\rho\, d\delta\rho + \rho(d\psi^2 + \cos \psi^2 d\varphi^2)\delta\rho}{dt}$$

$$+ \int \frac{\rho^2 (d\psi\, d\delta\psi - \sin \psi \cos \psi\, d\varphi^2\, \delta\psi + \cos \psi^2\, d\varphi\, d\delta\varphi}{dt}$$

On fera disparoître de dessous le signe $\int$ les doubles signes $d\delta$, par des intégrations par parties, & on rejettera d'abord les termes qui contiendroient des variations hors du signe $\int$, parce que ces variations devant alors se rapporter aux extrémités de l'intégrale, deviennent nulles par la supposition que les premiers & derniers points des courbes décrites par les corps soient donnés & invariables. On aura ainsi cette transformée

$$\int u\,\delta ds = -\int \Big[\Big(d.\frac{d\rho}{dt} - \rho\,\frac{d\psi^2 \cos \psi^2 + d\varphi^2}{dt}\Big)\delta\rho$$

$$+ \Big(\frac{\rho^2 \sin \psi \cos \psi\, d\varphi^2}{dt} + d.\frac{\rho^2 d\psi}{dt}\Big)\delta\psi + d.\frac{\cos \psi^2 d\varphi}{dt}\,\delta\varphi\Big];$$

par conséquent l'équation du *maximum* ou *minimum* sera

$$-\int [dt\, S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c)\, m$$

$$+ S\Big[\Big(d.\frac{d\rho}{dt} - \rho\,\frac{d\psi^2 + \cos \psi^2 d\varphi^2}{dt}\Big)\delta\rho +$$

$$\left(\frac{\rho^2 \sin\psi \cos\psi\, d\varphi^2}{dt} + d.\frac{\rho^2\, d\psi}{dt}\right)\delta\psi + d.\frac{\cos\psi^2 d\varphi}{dt}\delta\varphi\Big]\, m = 0.$$

Egalant à zéro la quantité qui eſt ſous le ſigne $\int$, on aura une équation indéfinie, analogue à celle de l'article précédent, mais qui au lieu des variations $\delta x, \delta y, \delta z$, contiendra les $\delta\rho$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$; & on en tirera les équations néceſſaires pour la ſolution du problême, en réduiſant d'abord toutes les variations au plus petit nombre poſſible, faiſant enſuite des équations ſéparées des termes affectés de chacune des variations reſtantes.

En employant d'autres indéterminées, on aura des formules différentes; & on ſera aſſuré d'avoir toujours dans chaque cas les formules les plus ſimples que la nature des indéterminées peut comporter. Voyez le ſecond volume des Mémoires de l'Académie de Turin.

QUATRIEME SECTION.

Méthode la plus ſimple pour parvenir aux équations qui déterminent le mouvement d'un ſyſtême quelconque de corps animés par des forces accélératrices quelconques.

1. LA formule générale à laquelle nous avons réduit dans la ſeconde Section, toute la théorie de la Dynamique, n'a beſoin que d'être développée, pour donner les équations néceſſaires à la ſolution de quelque problême de cette ſcience que ce ſoit; & ce développement, qui n'eſt qu'une affaire de pur calcul, peut encore être ſimplifié à pluſieurs égards, par

par les moyens que nous allons expoſer dans cette Section.

Comme tout conſiſte à réduire les différentes variables qui entrent dans la formule dont il s'agit, au plus petit nombre poſſible par le moyen des équations de condition données par la nature de chaque problême; une des principales opérations eſt de ſubſtituer à la place de ces variables des fonctions d'autres variables. Cet objet eſt toujours facile à remplir par les méthodes ordinaires; mais nous allons donner une maniere particuliere d'y ſatisfaire relativement à la formule propoſée, & qui a l'avantage de conduire toujours directement à la transformée la plus ſimple.

2. Cette formule eſt compoſée de deux parties différentes qu'il faut conſidérer ſéparément.

La premiere contient les termes

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) m,$$

qui proviennent uniquement des forces réſultantes de l'inertie des corps.

La ſeconde eſt compoſée des termes

$$S(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c)\, m$$

dûs aux forces accélératrices P, Q, R, &c, qu'on ſuppoſe agir effectivement ſur chaque corps, ſuivant les lignes p, q, r, &c, & qui tendent à diminuer ces lignes.

Je déſignerai pour plus de ſimplicité la premiere partie par Γ, & la ſeconde par Δ, de ſorte que $\Gamma + \Delta = 0$ ſera la formule générale du mouvement (art. 7, Sect. 2).

3. Conſidérons d'abord la quantité $d^2 x\,\delta x + d^2 y\,\delta y + d^2 z\,\delta z$, il eſt clair que ſi on y ajoute celle-ci $dx\,d\delta x$

$+ dy\, d\delta y + dz\, d\delta z$, la somme sera intégrable, & aura pour intégrale $dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z$. D'où il suit que l'on a $d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = d.(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - dx\, d\delta x - dy\, d\delta y - dz\, d\delta z$. Or, comme nous l'avons déja remarqué plus haut, le double signe $d\delta$ est équivalent à δd (Sect. préc. art. 12); de sorte que la quantité $dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z$ peut se réduire à la forme $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}\,\delta.(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Ainsi on aura cette réduction $d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = d.(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - \frac{1}{2}\,\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2)$; par laquelle on voit que pour calculer la quantité proposée $d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z$, il suffit de calculer ces deux-ci qui ne contiennent que des différences premieres, $dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z$, $dx^2 + dy^2 + dz^2$, & de différentier ensuite l'une par d, & l'autre par δ.

4. Supposons donc qu'il s'agisse de substituer pour les variables x, y, z, des fonctions données d'autres variables ξ, ψ, φ, &c; différentiant ces fonctions, on aura des expressions de la forme $dx = A\,d\xi + B\,d\psi + C\,d\varphi +$ &c, $dy = A'\,d\xi + B'\,d\psi + C'\,d\varphi +$ &c, $dz = A''\,d\xi + B''\,d\psi + C''\,d\varphi +$ &c, dans lesquelles A, A', A'', B, B' &c, seront des fonctions connues des mêmes variables ξ, ψ, φ, &c, & les valeurs de δx, δy, δz seront exprimées aussi de la même maniere en changeant seulement d en δ.

Faisant ces substitutions dans la quantité $dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z$, elle deviendra de cette forme,

$$F\,d\xi\,\delta\xi + G(d\xi\,\delta\psi + d\psi\,\delta\xi) + H\,d\psi\,\delta\psi$$
$$+ I(d\xi\,\delta\varphi + d\varphi\,\delta\xi) + \text{\&c.}$$

où F, G, H, I, &c, seront des fonctions finies de ξ, ψ, φ, &c.

Donc changeant δ en d, on aura aussi la valeur de $dx^2 + dy^2 + dz^2$, laquelle sera

$$Fd\xi^2 + 2\,Gd\xi d\psi + Hd\psi^2 + 2\,Id\xi d\varphi + \&c.$$

Qu'on différentie par d la premiere de ces deux quantités, on aura la différentielle

$$\begin{aligned} &d.(Fd\xi)\times\delta\xi + Fd\xi d\delta\xi + d.(Gd\xi)\times\delta\psi \\ &+ d.(Gd\psi)\times\delta\xi + Gd\xi d\delta\psi + Gd\psi d\delta\xi \\ &+ d.(Hd\psi)\times\delta\psi + Hd\psi d\delta\psi + \&c.; \end{aligned}$$

différentiant ensuite la seconde par δ, on aura celle-ci,

$$\begin{aligned} &\delta Fd\xi^2 + 2\,Fd\xi\delta d\xi + 2\,\delta Gd\xi d\psi + 2\,Gd\psi\delta d\xi \\ &+ 2\,Gd\xi\delta d\psi + \delta Hd\psi^2 + 2\,Hd\psi\delta d\psi + \&c. \end{aligned}$$

Si donc on retranche la moitié de cette derniere différentielle de la premiere, & qu'on observe que $d\delta$ & δd sont la même chose, on aura

$$\begin{aligned} &d.(Fd\xi)\times\delta\xi - \tfrac{1}{2}\,\delta Fd\xi^2 + d.(Gd\xi)\times\delta\psi \\ &+ d.(Gd\psi)\times\delta\xi - \tfrac{1}{2}\,\delta Gd\xi d\psi + d.(Hd\psi)\times\delta\psi \\ &- \tfrac{1}{2}\,\delta Hd\psi^2 + \&c. \end{aligned}$$

pour la valeur de la quantité cherchée $d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z$.

Or il est visible que cette valeur peut se déduire immédiatement de la derniere différentielle, en divisant tous les termes par 2, en changeant les signes de ceux qui ne contiennent point la double caractéristique δd, & en effaçant dans les autres la d après la δ, pour l'appliquer aux quantités qui

multiplient les doubles différences affectées de δd. Ainsi le terme $\delta F d\xi^2$ donne $-\frac{1}{2}\delta F d\xi^2$, le terme $2 F d\xi \delta d\xi$ donnera $d.(Fd\xi) \times \delta\xi$, le terme $2\delta G d\xi d\psi$ donnera $-\delta G d\xi d\psi$, le terme $2 G d\psi \delta d\xi$ donnera $d.(Gd\psi)\times\delta\xi$, & ainsi des autres.

5. D'où il s'ensuit que si on désigne par α la fonction de ξ, ψ, φ, &c, & de $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, &c, dans laquelle se transforme la quantité $\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ par la substitution des valeurs de x, y, z, en ξ, ψ, φ, &c, on aura en général cette transformée

$$d^2 x \delta x + d^2 y \delta y + d^2 z \delta z$$
$$= \left(-\frac{\delta\alpha}{\delta\xi} + d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}\right)\delta\xi + \left(-\frac{\delta\alpha}{\delta\psi} + d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}\right)\delta\psi$$
$$+ \left(-\frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} + d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi}\right)\delta\varphi + \&c,$$

en dénotant, suivant l'usage, par $\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}$ le coëfficient de $\delta\xi$ dans la différence $\delta\alpha$, par $\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}$ le coëfficient de $\delta d\xi$ dans la même différence; & ainsi des autres.

6. Ce qu'on vient de trouver d'une maniere particuliere, auroit pu l'être aussi simplement & plus généralement par les principes de la méthode des variations.

Soit en effet α une fonction quelconque de x, y, z, &c, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, &c, &c, laquelle devienne une fonction de ξ, ψ, φ, &c, $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, &c, $d^2\xi$, $d^2\psi$, $d^2\varphi$, &c, &c, par la substitution des valeurs de x, y, z, &c, exprimées en ξ, ψ, φ, &c; en différentiant par rapport à δ, on aura cette équation identique,

$$\delta\alpha = \frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta dx}\delta dx + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2 x}\delta d^2 x + \&c.$$
$$+ \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta dy}\delta dy + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2 y}\delta d^2 y + \&c.$$
$$+ \frac{\delta\alpha}{\delta z}\delta z + \frac{\delta\alpha}{\delta dz}\delta dz + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2 z}\delta d^2 z + \&c.$$
&c.
$$= \frac{\delta\alpha}{\delta\xi}\delta\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta\phi}\delta\phi + \&c.$$
$$+ \frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}\delta d\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}\delta d\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta d\phi}\delta d\phi + \&c.$$
$$+ \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi}\delta d^2\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi}\delta d^2\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\phi}\delta d^2\phi + \&c.$$
&c.

Qu'on y change les doubles ſignes δd, δd^2, &c, en leurs équivalents $d\delta$, $d^2\delta$, &c; qu'enſuite on integre par rapport à d, & qu'on faſſe diſparoître par des intégrations par parties tous les doubles ſignes $d\delta$, $d^2\delta$, &c, ſous le ſigne intégral $\int$ qui ſe rapporte au ſigne différentiel d; on aura une équation de cette forme,

$$\int(A\delta x + B\delta y + C\delta z + \&c) + Z =$$
$$\int(A'\delta\xi + B'\delta\psi + C'\delta\phi + \&c) + Z',$$

dans laquelle

$$A = \frac{\delta\alpha}{\delta x} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta dx} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 x} - \&c.$$
$$B = \frac{\delta\alpha}{\delta y} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta dy} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 y} - \&c.$$
$$C = \frac{\delta\alpha}{\delta z} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta dz} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 z} - \&c.$$
&c.

$$A' = \frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi} - \&c.$$

$$B' = \frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi} - \&c.$$

$$C' = \frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\varphi} - \&c.$$

&c.

$$Z = \left(\frac{\delta\alpha}{\delta dx} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 x} + \&c.\right)\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2 x} d\delta x + \&c.$$
$$+ \left(\frac{\delta\alpha}{\delta dy} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 y} + \&c\right)\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2 y} d\delta y + \&c.$$
$$+ \left(\frac{\delta\alpha}{\delta dz} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 z} + \&c.\right)\delta z + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2 z} d\delta z + \&c.$$

&c.

$$Z' = \left(\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi} + \&c.\right)\delta\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi} d\delta\xi + \&c.$$
$$+ \left(\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi} + \&c.\right)\delta\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi} d\delta\psi + \&c.$$
$$+ \left(\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\varphi} + \&c.\right)\delta\varphi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\varphi} d\delta\varphi + \&c.$$

Donc redifférentiant & tranſpoſant, on aura l'équation

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + \&c. - A'\delta\xi - B'\delta\psi - C'\delta\varphi - \&c.$$
$$= dZ' - dZ,$$

laquelle doit être identique & avoir lieu quelles que ſoient les variations ou différences marquées par la lettre δ.

Ainſi puiſque le ſecond membre de cette équation eſt une différentielle exacte par rapport à la caractériſtique d, il faudra que le premier membre en ſoit une auſſi par rapport à la même caractériſtique, & indépendamment de la caractériſtique δ; or c'eſt ce qui ne ſe peut, parce que les termes de ce premier membre contiennent ſimplement les

variations δx, δy, δz, &c, $\delta \xi$, $\delta \psi$, &c, & nullement les différentielles de ces variations.

D'où il ſuit que pour que l'équation puiſſe ſubſiſter, il faudra néceſſairement que les deux membres ſoient nuls chacun en particulier ; ce qui donnera ces deux équations identiques

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + \&c, = A'\delta\xi + B'\delta\psi + C'\delta\varphi + \&c.$$

$$dZ = dZ',$$

leſquelles peuvent être utiles dans différentes occaſions.

Soit, par exemple $\alpha = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, on aura $\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta\alpha}{\delta dx} = dx$, $\frac{\delta\alpha}{\delta d^2 x} = 0$, &c, & ainſi des autres quantités ſemblables ; donc

$$A = -d^2 x,\ B = -d^2 y,\ C = -d^2 z;$$

enſuite comme α ne contient que des différences du premier ordre, on aura ſimplement $A' = \frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}$, $B' = \frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}$, $C' = \frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi}$, &c. Donc on aura l'équation identique

$$-d^2 x\delta x - d^2 y\delta y - d^2 z\delta z =$$

$$\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}\right)\delta\xi + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}\right)\delta\psi$$

$$+ \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\varphi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\varphi}\right)\delta\varphi + \&c.$$

qui s'accorde avec celle de l'article 5.

7. Il réſulte de-là, que pour avoir la valeur de la quantité r (art. 2), en fonction de ξ, ψ, φ, &c, il ſuffira de chercher la valeur de la quantité $S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right)m$ en fonc-

tion de ξ, ψ, φ, &c, & de leurs différentielles; car nommant T cette fonction, on aura sur le champ

$$\Gamma = \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}\right)\delta\xi + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi}\right)\delta\psi$$

$$+ \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi}\right)\delta\varphi + \&c.$$

Et cette transformation aura lieu également, quand même parmi les nouvelles variables il se trouveroit le tems t, pourvu qu'on le regarde comme constant, c'est-à-dire, qu'on fasse $\delta t = 0$.

Au reste, il est bon de remarquer que si l'expression de T renferme un terme dA, qui soit la différentielle complette d'une fonction A dans laquelle une des variables comme ξ n'entre que sous la forme finie, ce terme ne donnera rien dans la valeur de Γ relativement à cette variable. Car faisant $T = dA = \frac{dA}{d\xi}d\xi + \frac{dA}{d\psi}d\psi + \&c$, on a

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi} = \frac{dA}{d\xi}, \quad \frac{\delta T}{\delta\xi} = \frac{\delta.\frac{dA}{d\xi}}{d\xi}d\xi + \frac{\delta.\frac{dA}{d\psi}}{\delta\xi}d\psi + \&c.$$

$$= \frac{d^2A}{d\xi^2}d\xi + \frac{d^2A}{d\xi\,d\psi}d\psi + \&c. = d.\frac{dA}{d\xi}.$$

Donc $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta\xi}$ coëfficient de $\delta\xi$ deviendra $= d.\frac{dA}{d\xi} - d.\frac{dA}{d\xi} = 0$.

Il s'ensuit de-là que si l'expression de T contenoit un terme de la forme $B\,dA$, A étant fonction de ξ, ψ, &c, sans $d\xi$, & B une fonction quelconque sans ξ, ce terme donneroit simplement dans la valeur de Γ, relativement à la variation de ξ le terme $dB\,\frac{\delta A}{\delta\xi}$. Car donnant au terme $B\,dA$ la forme $d.(BA) - A\,dB$, on voit d'abord que le terme

terme $d.(BA)$ ne donneroit rien relativement à la variation de ξ, puisque AB contient ξ sans $d\xi$; ensuite comme dB ne contient point ξ ni $d\xi$; & que A contient ξ sans $d\xi$, on voit qu'en faisant $T = - A\,dB$, on aura $\frac{\delta T}{\delta d\xi} = 0$, & $\frac{\delta T}{\delta \xi} = - \frac{\delta A}{\delta \xi}\,dB$; de sorte que le coëfficient de $\delta \xi$ dans Γ se réduira à $\frac{\delta A}{\delta \xi}\,dB$.

8. A l'égard de la quantité Δ (art. 2), elle est toujours facile à réduire en fonction de ξ, ψ, φ, &c, puisqu'il ne s'agit que d'y réduire séparément les expressions des distances p, q, r, &c, & des forces P, Q, R, &c. Mais cette opération devient encore plus facile, lorsque les forces sont telles que la somme des momens, c'est-à-dire la quantité $P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c, est intégrable, ce qui, comme nous l'avons déja observé, est proprement le cas de la nature, (art. 10, Sect. préc.).

Car supposant, comme dans l'endroit cité,

$$d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c,$$

on aura Π exprimé par une fonction finie de p, q, r, &c, par conséquent on aura aussi $\delta\Pi = P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r +$ &c; donc $\Delta = S\,\delta\Pi m = \delta\,.\,S\,\Pi m$, puisque le signe S est indépendant du signe δ.

Il n'y aura ainsi qu'à chercher la valeur de la quantité $S\,\Pi m$ en fonction de ξ, ψ, φ, &c; ce qui ne demande que la substitution des valeurs de x, y, z, en ξ, ψ, φ, &c, dans les expressions de p, q, &c, (art. 8, Sect. 2); & cette valeur de $S\,\Pi m$ étant nommée V, on aura immédiatement

$$\Delta = \frac{\delta V}{\delta \xi}\,\delta\xi + \frac{\delta V}{\delta \psi}\,\delta\psi + \frac{\delta V}{\delta \varphi}\,\delta\varphi, \&c.$$

9. De cette maniere la formule générale du mouvement $\Gamma + \Delta = 0$ (art. 2) ſera transformée en celle-ci,

$$\Xi\,\delta\xi + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi + \&c = 0,$$

dans laquelle on aura

$$\Xi = d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi}$$

$$\Psi = d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi}$$

$$\Phi = d.\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi}$$

&c,

en ſuppoſant

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}\right)m,\ V = S\Pi m,$$

$$\&\ d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

Si donc dans le choix des nouvelles variables ξ, ψ, φ, &c, on a eu égard aux équations de condition données par la nature du ſyſtême propoſé, enſorte que ces variables ſoient maintenant tout-à-fait indépendantes les unes des autres, & que par conſéquent leurs variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, &c, demeurent abſolument indéterminées, on aura ſur le champ les équations particulieres $\Xi = 0$, $\Psi = 0$, $\Phi = 0$, &c, leſquelles ſerviront à déterminer le mouvement du ſyſtême; puiſque ces équations ſont en même nombre que les variables ξ, ψ, φ, &c, d'où dépend la poſition du ſyſtême à chaque inſtant.

Mais quoiqu'on puiſſe toujours ramener la queſtion à cet état, puiſqu'il ne s'agit que d'éliminer par les équations de condition, autant de variables qu'elles permettent de le faire, & de prendre enſuite pour ξ, ψ, φ, &c, les variables

reſtantes; il peut néanmoins y avoir des cas où cette voie ſoit trop pénible, & où il ſoit à propos, pour ne pas trop compliquer le calcul, de conſerver un plus grand nombre de variables. Alors les équations de condition auxquelles on n'aura pas encore ſatisfait, devront être employées à éliminer dans la formule générale, quelques-unes des variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, &c.; mais au lieu de l'élimination actuelle, il ſera plus ſimple d'employer la méthode expoſée dans la quatrieme Section de la premiere Partie.

10. Soient donc comme dans l'article 3 de la Section citée, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, &c, les équations dont il s'agit, réduites en fonctions de ξ, ψ, φ; &c; enſorte que L, M, N, &c. ſoient des fonctions données de ces variables. On ajoutera au premier membre de la formule générale (art. préc.) la quantité $\lambda dL + \mu dM + \nu dN +$ &c. dans laquelle λ, μ, ν, &c, ſont des coëfficiens indéterminés; & on pourra regarder alors les variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, &c, comme indépendantes & arbitraires.

On aura ainſi l'équation générale

$$\Xi\delta\xi + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \&c + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + \&c = 0,$$

laquelle devant être vérifiée indépendamment des variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, &c, donnera ces équations particulieres.

$$\Xi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\xi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\xi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\xi} + \&c = 0$$

$$\Psi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\psi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\psi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\psi} + \&c = 0$$

$$\Phi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\varphi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\varphi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\varphi} + \&c = 0$$

&c.

Eliminant les inconnues λ, μ, ν, &c, il reſtera les équations néceſſaires pour la ſolution du problême.

On peut faire d'ailleurs ſur les différens termes $\lambda \delta L$, $\mu \delta M$, &c, des remarques analogues à celles de l'article 7 de la Section déja citée, & en déduire des concluſions ſemblables.

Au reſte rien n'empêche que les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, &c, ne puiſſent contenir auſſi la variable t qui repréſente le tems ; ſeulement il faudra la regarder comme conſtante dans la différenciation ſuivant δ, comme nous l'avons déja preſcrit plus haut.

11. En employant cette méthode, on peut conſerver ſi l'on veut les variables primitives x, y, z, pourvu que l'on ait égard à toutes les équations de condition données par la nature du ſyſtême entre ces variables. Il n'y aura alors qu'à ajouter au premier membre de la formule générale de l'article 7 de la ſeconde Section, la quantité $\lambda \delta L + \mu \delta M + \nu \delta N +$ &c, & vérifier enſuite l'équation par rapport à chacune des variations relatives aux différens corps du ſyſtême.

De cette maniere on aura donc pour chaque corps m trois équations de cette forme, (art. 8, Sect. citée)

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right) m + \lambda \frac{\delta L}{\delta x} + \mu \frac{\delta M}{\delta x} + \nu \frac{\delta N}{\delta x} + \&c = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right) m + \lambda \frac{\delta L}{\delta y} + \mu \frac{\delta M}{\delta y} + \nu \frac{\delta N}{\delta y} + \&c = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right) m + \lambda \frac{\delta L}{\delta z} + \mu \frac{\delta M}{\delta z} + \nu \frac{\delta N}{\delta z} + \&c = 0;$$

de ſorte que le nombre total des équations ſera triple de celui des corps.

Il faudra enſuite éliminer les indéterminées λ, μ, ν, &c, dont le nombre eſt égal à celui des équations de condition $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, &c, ce qui diminuera d'autant le nombre des équations trouvées; mais en y ajoutant les équations mêmes de condition, on aura de nouveau autant d'équations que de variables.

12. Cette méthode eſt ſur-tout utile lorſque le ſyſtême propoſé eſt compoſé d'une infinité de particules ou élémens dont l'aſſemblage forme une maſſe finie de figure variable. On emploiera alors une analyſe ſemblable à celle que nous avons développée dans la même Section quatrieme de la premiere Partie (art. 9 & ſuiv.); mais à la place de la caractériſtique d, dont nous nous ſommes ſervis dans cet endroit pour déſigner les différences des variables relatives aux différens élémens du ſyſtême, il conviendra ici de faire uſage d'une nouvelle caractériſtique D pour pouvoir conſerver l'autre caractériſtique d dans l'emploi auquel nous l'avons déja deſtinée plus haut.

Il y aura ainſi trois ſortes de différences indépendantes entr'elles; les unes marquées par d, & relatives au ſigne intégral $\int$; celles-ci ſe rapportent uniquement aux courbes décrites par chaque corps ou élément du ſyſtême; les autres marquées par D & relatives au ſigne intégral S, leſquelles ſe rapportent aux différens élémens du ſyſtême, & à la poſition inſtantanée de ces élémens entr'eux; enfin les différences ou variations marquées par δ, leſquelles ſe rapportent uniquement au changement arbitraire qu'on ſuppoſe dans la poſition du ſyſtême, & diſparoiſſent d'elles-mêmes à la fin du calcul.

13. Soit donc Dm la masse de chaque élément du systême, il faudra mettre Dm à la place de m dans les expressions de Γ & Δ (art. 2), & par conséquent aussi dans celles de T & V, (art. 9); ensuite il faudra ajouter au premier membre de la formule générale $\Gamma + \Delta = 0$ les termes dûs aux différentes équations de condition. Or ces équations peuvent être de deux sortes; les unes *indéterminées* & appartenantes également à tous les élémens du systême; les autres *déterminées* & propres seulement à quelques-uns de ces élémens. Soient $L = 0$, $M = 0$, &c, les équations de condition de la premiere espece, on aura les quantités L, M, &c, exprimées par des fonctions des coordonnées x, y, z, & de leurs différences suivant D, savoir Dx, Dy, Dz, D^2x, D^2y, &c; & comme il n'y a que trois variables x, y, z, il est clair que les équations entre ces variables ne peuvent être que trois au plus. Prenant donc des coëfficiens indéterminés λ, μ, &c, on aura par rapport à chaque élément du systême, les termes $\lambda \delta L + \mu \delta M +$ &c, à ajouter à la formule générale; donc la totalité des termes qu'il y faudra ajouter, sera représentée par $S(\lambda \delta L + \mu \delta M +$ &c$)$.

14. Désignons maintenant par $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, &c, les équations de condition *déterminées*, les quantités A, B, C, &c, seront aussi des fonctions des coordonnées & de leurs différences suivant D, mais seulement pour des points déterminés du systême. Nous marquerons ces coordonnées par un ou plusieurs traits, & en particulier nous marquerons par un trait toutes les quantités qui se rapportent aux points où commence l'intégrale représentée par le signe S, par deux traits celles qui se rapportent aux points où la même inté-

grale finit, & par trois traits ou davantage les quantités relatives à d'autres points déterminés du système.

Ainsi les valeurs de A, B, C, &c, seront données en fonctions de x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', &c; Dx', Dy', Dz', Dx'', Dy'', &c, &c; & les termes à ajouter à la formule générale en conséquence des équations de condition $A=0$, $B=0$, &c, seront $\alpha\delta A+\beta\delta B+\gamma\delta C+$ &c, en prenant pour α, β, γ, &c, de nouveaux coëfficiens indéterminés.

15. On aura donc pour le mouvement du système cette équation générale,

$$\begin{aligned}0 = {} & S\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) Dm \\ & + S(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&c)\,Dm \\ & + S(\lambda\delta L+\mu\delta M+\&c) \\ & + \alpha\delta A+\beta\delta B+\gamma\delta C+\&c,\end{aligned}$$

laquelle doit avoir lieu quelles que soient les différences ou variations δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, &c.

Cette équation est entiérement analogue à celles que l'on trouve par la méthode des *variations* pour la détermination des *maxima* & *minima* des formules intégrales; & il faudra la traiter suivant les mêmes regles. Voyez ce que nous avons déja dit là-dessus dans la Section quatrieme de la premiere Partie (art. 16 & suiv.).

16. Tout se réduit à faire disparoître de dessous le signe S les doubles différences affectées de δD, δD^2, &c.

Soit, par exemple, le terme $S\Omega\delta Dx$, on changera d'abord δD en $D\delta$, ensuite on intégrera par partie relativement à

la caractériſtique D qui ſe rapporte au ſigne S, & complettant l'intégrale, on aura ſelon la notation de l'article 14; $S\Omega\delta Dx = \Omega''\delta x'' - \Omega'\delta x' - S\delta x D\Omega$. On trouvera de même en intégrant autant qu'il eſt poſſible; par rapport à D, & complettant, $S\Omega\delta D^2 x = \Omega'' D\delta x' - D\Omega''\delta x'' - \Omega' D\delta x' + D\Omega'\delta x' + S\delta x D^2\Omega$, & ainſi des autres.

Par de ſemblables réductions, on ramenera donc l'équation générale de l'article précédent à cette forme,

$$S(\Xi\delta x + \Psi\delta y + \Phi\delta z) + \Sigma = 0,$$

dans laquelle Ξ, Ψ, Φ ſeront des fonctions de x, y, z, Dx, Dy, Dz, $D^2 x$, &c, ainſi que de λ, μ, &c, $D\lambda$, $D\mu$, &c; & où Σ ſera composée de différens termes affectés chacun de quelqu'une des variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, &c, ou de leurs différences $D\delta x'$, $D^2\delta x'$ &c.

On égalera alors ſéparément à zéro chacune des quantités affectées des différentes variations, comme ſi ces variations étoient toutes indépendantes & arbitraires. Ainſi on aura d'abord ces trois équations indéfinies $\Xi = 0$, $\Psi = 0$, $\Phi = 0$ pour tous les élémens du ſyſtême; enſuite chaque terme de la quantité Σ donnera une équation définie & relative à des points déterminés du même ſyſtême. Par le moyen de ces différentes équations, on éliminera les indéterminées λ, μ, &c, α, β, γ, &c, & les équations réſultantes étant combinées enſuite avec les équations de condition

$$L = 0,\ M = 0,\ \&c,\ A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ \&c.$$

donneront dans chaque cas la ſolution complette du problême. Le reſte ne ſera plus qu'une affaire de pur calcul.

CINQUIEME

CINQUIEME SECTION.

Solution de différens problêmes de Dynamique.

NOUS avons donné dans la premiere Partie (Sect. V), la ſolution de pluſieurs problêmes ſur l'équilibre des corps. Rien n'eſt plus facile que d'appliquer au mouvement des mêmes corps les formules trouvées pour leur équilibre; car d'après ce qu'on a démontré dans la ſeconde Section (art. 4), il ne faut qu'ajouter aux forces qui ſont ſuppoſées agir ſur chaque corps, les nouvelles forces accélératrices $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$, dirigées ſuivant les lignes x, y, z, en nommant t le tems écoulé, & faiſant dt conſtant.

Ainſi dans les problêmes où X, Y, Z déſignent les forces abſolues qui tirent le corps m regardé comme un point ſuivant les coordonnées x, y, z, il n'y aura qu'à mettre par-tout à la place de ces forces, celles-ci $X + m\frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y + m\frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z + m\frac{d^2 z}{dt^2}$; & ainſi pour les forces qui agiſſent ſur chacun des corps du ſyſtême. Mais dans les problêmes où l'on tient compte de la maſſe des corps, & où X, Y, Z n'expriment que les forces qui agiſſent ſur chaque point de la maſſe finie m, & ſont par conſéquent du genre des forces accélératrices, il faudra mettre ſimplement à la place de X, Y, Z, les quantités $X + \frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y + \frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z + \frac{d^2 z}{dt^2}$; & ainſi de ſuite.

De cette maniere les équations trouvées pour l'équilibre, donneront immédiatement celles du mouvement, & les mêmes problêmes se trouveront résolus également pour les deux états de repos & de mouvement. Il est vrai que dans le cas du mouvement, les équations étant différentielles du second ordre, elles demandent ensuite des intégrations relatives aux différentes variables t, x, y, z, x', y', &c; mais c'est au calcul intégral à s'en charger; & la Dynamique a fait tout ce qu'on étoit en droit d'attendre d'elle, en donnant les équations fondamentales.

Cependant comme ces équations peuvent avoir différentes formes plus ou moins simples, & sur-tout plus ou moins propres pour l'intégration, il n'est pas indifférent sous quelle forme elles se présentent d'abord; & c'est peut-être un des principaux avantages de notre méthode, de fournir toujours les équations de chaque problême sous la forme la plus simple relativement aux variables qu'on y emploie, & de mettre en état de juger d'avance quelles sont les variables dont l'emploi peut en faciliter le plus l'intégration.

Nous allons donner ici pour cet objet quelques principes généraux, dont on verra ensuite l'application dans la solution de différens problêmes.

2. Il est clair par les formules que nous venons de donner dans la Section précédente, que les termes différentiels des équations pour le mouvement d'un systême quelconque de corps, viennent uniquement de la quantité T qui exprime la somme de tous les $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\,m$ relativement aux différens corps; chaque variable finie, comme ξ, qui entrera dans l'expression de T donnant le terme $-\frac{\delta T}{\delta \xi}$, &

chaque variable différentielle, comme $d\xi$, donnant le terme $d. \frac{\delta T}{\delta d\xi}$. D'où l'on voit d'abord que les termes dont il s'agit ne pourront contenir d'autres fonctions des variables, que celles qui se trouveront dans l'expression même de T; par conséquent si en employant des sinus & cosinus d'angles, ce qui se présente naturellement dans la solution de plusieurs problêmes, il arrive que les sinus & cosinus disparoissent de la fonction T, elle ne contiendra alors que les différentielles de ces angles, & les termes en question ne contiendront aussi que ces mêmes différentielles. Ainsi il y aura toujours à gagner pour la simplicité des équations du problême à employer ces sortes de substitutions.

Par exemple, si à la place des deux coordonnées x, y, on emploie le rayon vecteur ρ mené du centre des mêmes coordonnées, & faisant avec l'axe des x l'angle φ, on aura $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, & différentiant $dx = \cos \varphi \, d\rho - \rho \sin \varphi \, d\varphi$, $dy = \sin \varphi \, d\rho + \rho \cos \varphi \, d\varphi$; donc $dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$, expression fort simple qui ne contient ni sinus, ni cosinus de φ, mais seulement sa différentielle $d\varphi$. De cette maniere la quantité $dx^2 + dy^2 + dz^2$, se trouvera changée en $\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2$.

On pourroit encore substituer au lieu de ρ & z, un nouveau rayon vecteur r avec l'angle ψ que ce rayon fait avec ρ qui en est la projection; ce qui donneroit $\rho = r \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, & par conséquent $d\rho^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2$; de sorte que la quantité $dx^2 + dy^2 + dz^2$ seroit transformée en celle-ci $r^2 (\cos \psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2$. Ici il est clair que r sera le rayon mené du centre des coordonnées au point de l'espace où est le corps m, ψ sera l'inclinaison

de ce rayon ſur le plan des x & y, & φ l'angle de la projection de ce rayon ſur le même plan avec l'axe des x; & l'on aura $x = r \cos \psi \cos \varphi$, $y = r \cos \psi \sin \varphi$, $z = r \sin \psi$.

Enfin on pourra employer à volonté d'autres ſubſtitutions; & lorſque le ſyſtême eſt compoſé de pluſieurs corps, on pourra les rapporter immédiatement les uns aux autres par des coordonnées relatives; les circonſtances de chaque problême indiqueront toujours celles qui ſeront le plus propres. On pourra même, après avoir trouvé d'après une ſubſtitution, une ou quelques-unes des équations du problême, déduire les autres d'autres ſubſtitutions; ce qui fournira de nouveaux moyens de diverſifier ces équations, & de trouver les plus ſimples & les plus faciles à intégrer.

3. Les autres termes des équations du mouvement dépendent des forces accélératrices qu'on ſuppoſe agir ſur les corps, & des équations de condition qui doivent ſubſiſter entre les variables relatives à la poſition des corps dans l'eſpace.

Lorſque les forces P, Q, R, &c, tendent à des centres fixes ou à des corps du même ſyſtême, & ſont proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances, comme celà a lieu dans la nature, la quantité V qui exprime la ſomme des quantités $m\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c)$ pour tous les corps m du ſyſtême, ſera une fonction algébrique des diſtances, & fournira pour chaque variable ξ dont elle ſe trouvera compoſée, un terme fini de la forme $\frac{\delta V}{\delta \xi}$.

De même les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, &c,

fourniront pour la même variable ξ les termes $\lambda \frac{\delta L}{\delta \xi}$, $\mu \frac{\delta M}{\delta \xi}$, &c, & ainſi des autres. De ſorte qu'il n'y aura qu'à ajouter à la valeur de V les quantités λL, μM, &c: en regardant enſuite λ, μ, &c, comme conſtantes dans les différentiations en δ.

Si donc quelques-unes des variables qui entrent dans la fonction T, n'entrent point dans V ni dans L, M, &c; les équations relatives à ces variables ne contiendront que des termes différentiels, & l'intégration n'en ſera que plus facile, ſur-tout ſi ces variables ne ſe trouvent dans T que ſous la forme différentielle. C'eſt ce qui aura lieu lorſque les corps étant attirés vers des centres, on prendra les diſtances à ces centres, & les angles décrits autour d'eux pour coordonnées.

4. Une intégration qui aura toujours lieu lorſque les forces ſont des fonctions de diſtances, & que les fonctions T, V, L, M, &c, ne contiennent point la variable finie t, eſt celle qui donne le principe de la conſervation des forces vives. Quoique nous ayons déja montré comment ce principe réſulte de notre formule générale de la Dynamique (Sect. III, art. 10), il ne ſera pas inutile de faire voir que les équations particulieres déduites de cette formule, fourniſſent toujours une équation intégrable qui eſt celle de la conſervation des forces vives.

Ces équations étant chacune de la forme

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} + \lambda\frac{\delta L}{\delta \xi} + \mu\frac{\delta M}{\delta \xi} + \&c = 0,$$

ſi on les ajoute enſemble après les avoir multipliées par les

différentielles respectives $d\xi$, &c., & qu'on fasse attention que les quantités T, V, L, M, &c, sont par l'hypothèse des fonctions algébriques des variables ξ, &c, sans t, il est clair qu'on aura l'équation

$$\left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}\right) d\xi + \&c + dV + \lambda\, dL + \mu\, dM + \&c = 0;$$

mais $L = 0$, $M = 0$, &c, étant les équations de condition, on aura généralement $dL = 0$, $dM = 0$, &c; par conséquent l'équation précédente se réduira à

$$\left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}\right) d\xi + \&c + dV = 0.$$

Or $d\xi\, d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} = d.\left(\frac{\delta T}{\delta d\xi}\, d\xi\right) - \frac{\delta T}{\delta d\xi}\, d^2\xi$;

& comme T est une fonction algébrique des variables ξ, &c, & de leurs différentielles $d\xi$, &c, sans t, on aura $dT = \frac{\delta T}{\delta \xi}\, d\xi + \frac{\delta T}{\delta d\xi}\, d^2\xi + \&c$; donc l'équation deviendra

$$d.\left(\frac{\delta T}{\delta d\xi}\, d\xi + \&c\right) - dT + dV = 0,$$

laquelle est évidemment intégrable, & dont l'intégrale est

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi}\, d\xi + \&c - T + V = \text{à une constante.}$$

Maintenant puisque $T = S\, \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}\, m$, il est visible que quelques variables qu'on substitue pour x, y, z, la fonction résultante sera nécessairement homogène & de deux dimensions relativement aux différences de ces variables; donc par le théorême connu on aura $\frac{\delta T}{\delta d\xi}\, d\xi + \&c = 2T$.

Donc l'intégrale trouvée sera simplement $T + V = const.$ laquelle contient le principe de la conservation des forces vives (Sect. III, art. 10).

Si la quantité V n'étoit pas une fonction algébrique, on n'auroit pas $dV = \frac{\delta V}{\delta \xi} d\xi +$ &c; & si les quantités T, L, M, &c, contenoient aussi la variable t, alors leurs différentielles dT, dL, dM, &c, contiendroient aussi les termes $\frac{\delta T}{\delta t} dt, \frac{\delta L}{\delta t} dt, \frac{\delta M}{\delta t} dt$, &c; donc les réductions qui ont rendu l'équation intégrable n'auroient plus lieu, ni par conséquent le principe de la conservation des forces vives.

5. Quoique le théorême sur les fonctions homogènes dont nous venons de faire usage, soit démontré dans différens ouvrages, & qu'on puisse par conséquent le supposer comme connu, la démonstration que voici est si simple, que je ne crois pas devoir la supprimer. Si F est une fonction homogène de différentes variables x, y, &c, & qu'elle soit de la dimension n; il est clair qu'en y mettant ax, ay, &c, à la place de x, y, &c, elle deviendra nécessairement $a^n F$, quelle que soit la quantité a. Donc faisant $a = 1 + \alpha$, & regardant α comme une quantité infiniment petite, l'accroissement infiniment petit de F dû aux accroissemens infiniment petits $\alpha x, \alpha y$, &c, de x, y, &c, sera $n \alpha F$. Mais en faisant varier x, y, &c, de $\alpha x, \alpha y$, on a en général pour la variation de F, $\frac{\delta F}{\delta x} \alpha x + \frac{\delta F}{\delta y} \alpha y +$ &c. Donc égalant ces deux expressions de l'accroissement de F, & divisant par α on aura,

$$nF = \frac{\delta F}{\delta x} x + \frac{\delta F}{\delta y} y + \&c.$$

6. L'intégrale relative à *la conſervation des forces vives*, eſt d'une grande utilité dans la ſolution des problèmes de Méchanique, ſur-tout lorſque la fonction T ne contient que la différentielle d'une variable qui ne ſe trouve point dans la fonction V; car cette intégrale ſervira alors à déterminer cette même variable, & à l'éliminer des équations différentielles.

A l'égard des intégrales qui ſe rapportent à *la conſervation du mouvement du centre de gravité*, & *au principe des aires*, & que nous avons déja trouvées d'une maniere générale dans la Section troiſieme, elles ſe préſenteront d'elles-mêmes dans la ſolution de chaque problême, pourvu qu'on ait ſoin dans le choix des variables de ſéparer le mouvement abſolu du ſyſtême des mouvemens relatifs des corps entr'eux, ainſi que nous l'avons fait dans la Section citée (art. 15).

Mais ces différentes intégrales ne ſuffiſent pour la ſolution complette du problême, que lorſque leur nombre égale celui des variables. Dans tous les autres cas il faudra chercher encore de nouvelles intégrales; mais on ne ſauroit donner là-deſſus de regle générale. Il y a cependant un cas très-étendu, qui eſt toujours ſuſceptible d'une ſolution complette; c'eſt celui où le ſyſtême ne fait que de très-petites oſcillations autour de ſa ſituation d'équilibre. Comme cette ſolution ſe déduit facilement de nos formules, nous commencerons par la donner ici, en y joignant différentes remarques nouvelles & importantes.

§. I.

§. I.

Solution générale du Problême des oscillations très-petites d'un systême quelconque de corps.

7. Soient a, b, c les valeurs des coordonnées rectangles x, y, z de chaque corps m du systême proposé dans le lieu de son équilibre. Comme on suppose que le systême dans son mouvement s'éloigne très-peu de sa situation d'équilibre, on aura en général $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, $z = c + \gamma$, les variables α, β, γ étant toujours très-petites ; & il suffira par conséquent d'avoir égard à la premiere dimension de ces quantités dans les équations différentielles du mouvement. La même chose aura lieu pour les autres quantités analogues, qu'on distinguera par un, deux, &c, traits relativement aux différens corps m', m'', &c, du même systême.

Considérons d'abord les équations de condition qui doivent avoir lieu par la nature du systême, & qu'on peut représenter par $L = 0$, $M = 0$, &c ; L, M, &c, étant des fonctions algébriques données des coordonnées x, y, z, x', y', &c. Comme la position d'équilibre est une de celles que le systême peut avoir, il s'ensuit que les mêmes équations $L = 0$, $M = 0$, &c, devront subsister, en supposant que x, y, z, x' &c, deviennent a, b, c, a', &c, d'où il est facile de conclure que ces équations ne sauroient renfermer le tems t.

Or soient A, B, &c, ce que deviennent L, M, &c, lorsque x, y, z, x', &c, deviennent a, b, c, a', &c ; il est clair qu'en substituant pour x, y, z, x', &c, leurs valeurs $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$, $a' + \alpha'$, &c, on aura à cause de la petitesse de α, β, γ, α', &c,

$$L = A + \frac{dA}{da}\alpha + \frac{dA}{db}\beta + \frac{dA}{dc}\gamma + \frac{dA}{da'}\alpha' + \&c,$$

$$M = B + \frac{dB}{da}\alpha + \frac{dB}{db}\beta + \frac{dB}{dc}\gamma + \frac{dB}{da'}\alpha' + \&c,$$

& ainſi de ſuite.

Donc 1°, on aura $A = 0$, $B = 0$, &c, relativement à l'équilibre; 2° on aura les équations

$$\frac{dA}{da}\alpha + \frac{dA}{db}\beta + \frac{dA}{dc}\gamma + \frac{dA}{da'}\alpha' + \&c = 0,$$

$$\frac{dB}{da}\alpha + \frac{dB}{db}\beta + \frac{dB}{dc}\gamma + \frac{dB}{da'}\alpha' + \&c = 0,$$

&c,

leſquelles donneront la relation qui doit ſubſiſter entre les variables α, β, γ, α', &c.

En négligeant d'abord les quantités très-petites du ſecond ordre & des ordres ſupérieurs, on aura des équations linéaires par leſquelles on déterminera les valeurs de quelques-unes de ces variables par les autres; enſuite par ces premieres valeurs on en trouvera de plus exactes, en tenant compte des ſecondes puiſſances, & des puiſſances plus hautes comme on voudra. On aura ainſi les valeurs de quelques-unes des variables α, β, γ, α', &c. exprimées par des fonctions en ſérie des autres variables; & ces variables reſtantes ſeront alors abſolument indépendantes entr'elles.

Au reſte, on pourra ſouvent auſſi, en ayant égard aux conditions du problême, réduire les coordonnées immédiatement par des ſubſtitutions, en fonctions rationelles & entieres d'autres variables indépendantes entr'elles, & très-petites, dont la valeur ſoit nulle dans l'état d'équilibre.

Ainsi nous supposerons en général que l'on ait

$$x = a + a1\xi + a2\psi + a3\varphi + \&c + a'1\xi^2 + \&c,$$

$$y = b + b1\xi + b2\psi + b3\varphi + \&c + b'1\xi^2 + \&c,$$

$$z = c + c1\xi + c2\psi + c3\varphi + \&c + c'1\xi^2 + \&c,$$

& ainsi des autres coordonnées x', y', &c, les quantités a, b, c, $a1$, $b1$ &c, sont constantes, & les quantités ξ, ψ, φ, &c, sont variables, très-petites, & nulles dans l'équilibre.

8. Il ne s'agira donc que de faire ces substitutions dans les valeurs de T & V (art. 2, 3); & il suffira de tenir compte des secondes dimensions, pour avoir des équations différentielles linéaires. Et d'abord il est clair que la valeur de T sera de cette forme,

$$T = \frac{(1)\,d\xi^2 + (2)\,d\psi^2 + (3)\,d\varphi^2 + \&c}{2\,dt^2}$$

$$+ \frac{(1,2)\,d\xi\,d\psi + (1,3)\,d\xi\,d\varphi + (2,3)\,d\psi\,d\varphi + \&c}{dt^2},$$

en supposant pour abréger

$$(1) = S(a1^2 + b1^2 + c1^2)m$$
$$(2) = S(a2^2 + b2^2 + c2^2)m$$
$$(3) = S(a3^2 + b3^2 + c3^2)m$$
&c.

$$(1,2) = S(a1\,a2 + b1\,b2 + c1\,c2)m$$
$$(1,3) = S(a1\,a3 + b1\,b3 + c1\,c3)m$$
$$(2,3) = S(a2\,a3 + b2\,b3 + c2\,c3)m$$
&c,

où le signe S dénote des intégrations ou sommations relatives à tous les différens corps m du systême, & en même-tems indépendantes des variables ξ, ψ, φ, &c. ainsi que du tems t.

Ensuite si on dénote par F la fonction algébrique $\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c)$, en y mettant a, b, c, à la place de x, y, z, il est clair que la valeur générale de $\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c)$, sera représentée ainsi,

$$F + \frac{dF}{da}(a1\,\xi + a2\,\psi + a3\,\varphi + \&c) + \frac{dF}{db}(b1\,\xi + b2\,\psi + b3\,\varphi + \&c) + \frac{dF}{dc}(c1\,\xi + c2\,\psi + c3\,\varphi + \&c) + \frac{d^2F}{2\,da^2}(a1\,\xi + a2\,\psi + a3\,\varphi + \&c)^2 + \frac{d^2F}{da\,db}(a1\,\xi + a2\,\psi + a3\,\varphi + \&c)(b1\,\xi + b2\,\psi + b3\,\varphi + \&c) + \frac{d^2F}{2\,db^2}(b1\,\xi + b2\,\psi + b3\,\varphi + \&c)^2 + \&c,$$

où il suffit d'avoir égard aux secondes dimensions de ξ, ψ. φ, &c.

Multipliant donc cette fonction par m, & intégrant avec le signe S, on aura en général

$$V = H + H1\,\xi + H2\,\psi + H3\,\varphi + \&c.$$
$$+ \frac{[1]\,\xi^2 + [2]\,\psi^2 + [3]\,\varphi^2 + \&c}{2}$$
$$+ [1,2]\,\xi\psi + [1,3]\,\xi\varphi + [2,3]\,\psi\varphi\ \&c,$$

en supposant

$$H = SFm$$

$$H1 = S\left(\frac{dF}{da}\,a1 + \frac{dF}{db}\,b1 + \frac{dF}{dc}\,c1\right)m$$

$$H2 = S\left(\frac{dF}{da}\,a2 + \frac{dF}{db}\,b2 + \frac{dF}{dc}\,c2\right)m$$

$$H3 = S\left(\frac{dF}{da}\,a3 + \frac{dF}{db}\,b3 + \frac{dF}{dc}\,c3\right)m$$

&c,

$$[1] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}\,a1^2 + \frac{d^2F}{db^2}\,b1^2 + \frac{d^2F}{dc^2}\,c1^2\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{d^2F}{dadb}\,a1b1 + 2\,\frac{d^2F}{dadc}\,a1c1 + 2\,\frac{d^2F}{dbdc}\,b1c1\right)m,$$

$$[2] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}\,a2^2 + \frac{d^2F}{db^2}\,b2^2 + \frac{d^2F}{dc^2}\,c2^2\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{d^2F}{dadb}\,a2b2 + 2\,\frac{d^2F}{dadc}\,a2c2 + 2\,\frac{d^2F}{dbdc}\,b2c2\right)m,$$

$$[3] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}\,a3^2 + \frac{d^2F}{db^2}\,b3^2 + \frac{d^2F}{dc^2}\,c3^2\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{d^2F}{dadb}\,a3b3 + 2\,\frac{d^2F}{dadc}\,a3c3 + 2\,\frac{d^2F}{dbdc}\,b3c3\right)m,$$

&c.

$$[1,2] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}\,a1a2 + \frac{d^2F}{db^2}\,b1b2 + \frac{d^2F}{dc^2}\,c1c2\right.$$

$$\left. + \frac{d^2F}{dadb}(a1b2 + a2b1) + \frac{d^2F}{dadc}(a1c2 + a2c1) + \frac{d^2F}{dbdc}(b1c2 + b2c1)\right)m,$$

$$[1,3] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}\,a1a3 + \frac{d^2F}{db^2}\,b1b3 + \frac{d^2F}{dc^2}\,c1c3\right.$$

$$\left. + \frac{d^2F}{dadb}(a1b3 + a3b1) + \frac{d^2F}{dadc}(a1c3 + a3c1) + \frac{d^2F}{dbdc}(b1c3 + b3c1)\right)m,$$

$$[2,3] = S\left(\frac{d^2F}{da^2}\,a2a3 + \frac{d^2F}{db^2}\,b2b3 + \frac{d^2F}{dc^2}\,c2c3\right.$$

$$\left. + \frac{d^2F}{dadb}(a2b3 + a3b2) + \frac{d^2F}{dadc}(a2c3 + a3c2) + \frac{d^2F}{dbdc}(b2c3 + b3c2)\right)m,$$

&c.

9. Ayant ainſi les valeurs de T & V exprimées en fonctions des variables ξ, ψ, φ, &c, indépendantes entr'elles, on n'aura plus aucune équation de condition à employer, & comme la quantité T ne contient que les différentielles des variables, on aura ſur le champ pour le mouvement du ſyſtême, les équations ſuivantes,

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}+\frac{\delta V}{\delta \xi}=0,\; d.\frac{\delta T}{\delta d\psi}+\frac{\delta V}{\delta \psi}=0,\; d.\frac{\delta T}{\delta d\varphi}+\frac{\delta V}{\delta \varphi}=0,\; \&c,$$

dont le nombre ſera, comme l'on voit, égal à celui des variables.

Ces équations doivent avoir lieu auſſi dans l'état d'équilibre, puiſque le ſyſtême y étant une fois y reſteroit toujours de lui-même; or dans l'équilibre on a conſtamment $x=a$, $y=b$, $z=c$, $x'=a'$, &c, par l'hypothèſe; donc $\xi=0$, $\psi=0$, $\varphi=0$, &c, ainſi que $\frac{d\xi}{dt}=0$, $\frac{d\psi}{dt}=0$, &c, & $\frac{d^2\xi}{dt^2}=0$, &c. Donc les termes $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}$, $d.\frac{\delta T}{\delta d\psi}$, &c, ſeront nuls, & les termes $\frac{\delta V}{\delta \xi}$, $\frac{\delta V}{\delta \psi}$, $\frac{\delta V}{\delta \varphi}$, &c, ſe réduiront à $H1$, $H2$, $H3$, &c. Par conſéquent on aura $H1=0$, $H2=0$, $H3=0$, &c; ce ſont les conditions néceſſaires pour que a, b, c, a', &c, ſoient les valeurs de x, y, z, x' &c, pour l'état d'équilibre, comme on le ſuppoſe.

En effet, il eſt viſible que $dV=S(Pdp+Qdq+Rdr+\&c)m$ exprime la ſomme des momens de toutes les forces Pm, Qm, Rm, &c, appliquées à tous les corps m du ſyſtême, & qui doivent ſe détruire mutuellement dans l'état d'équilibre; donc par la formule générale donnée dans la ſeconde Section de la premiere Partie, il faudra que l'on ait $dV=0$, par

rapport à chacune des variables indépendantes; par conséquent $\frac{\delta V}{\delta \xi} = 0$, $\frac{\delta V}{\delta \psi} = 0$, $\frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0$, &c, seront les conditions de l'équilibre, lequel étant supposé répondre à $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = 0$, &c, on aura $H\,1 = 0$, $H\,2 = 0$, $H\,3 = 0$ &c. De sorte que les premieres dimensions des variables ξ, ψ, φ, &c, dans l'expression de V disparoîtront toujours.

Substituant donc dans les équations générales les valeurs de T & de V, & faisant $H\,1$, $H\,2$, $H\,3$, &c, nuls, on aura pour le mouvement du systême,

$$0 = (1)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (1,2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (1,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c$$
$$+ [1]\xi + [1,2]\psi + [1,3]\varphi + \&c;$$
$$0 = (2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (1,2)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c$$
$$+ [2]\psi + [1,2]\xi + [2,3]\varphi + \&c;$$
$$0 = (3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (1,3)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\psi}{dt^2} + \&c$$
$$+ [3]\varphi + [1,3]\xi + [2,3]\psi + \&c.$$

&c.

équations qui étant sous une forme linéaire avec des coëfficiens constans, peuvent être intégrées rigoureusement & généralement par les méthodes connues.

10. On peut supposer d'abord que les variables dans ces sortes d'équations ayent entr'elles des rapports constans; c'est-à-dire, que l'on ait $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$, &c; par ces substitutions elles deviendront

$$\left((1)+(1,2)f+(1,3)g+\&c\right)\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left([1]+[1,2]f+[1,3]g+\&c\right)\xi=0$$

$$\left((2)f+(1,2)+(2,3)g+\&c\right)\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left([2]f+[1,2]+[2,3]g+\&c\right)\xi=0$$

$$\left((3)g+(1,3)+(2,3)f+\&c\right)\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left([3]g+[1,3]+[2,3]f+\&c\right)\xi=0$$

&c,

lesquelles donnent $\frac{d^2\xi}{dt^2}+K\xi=0$, en faisant

$$K=\frac{[1]+[1,2]f+[1,3]g+\&c}{(1)+(1,2)f+(1,3)g+\&c}$$

$$=\frac{[2]f+[1,2]+[2,3]g+\&c}{(2)f+(1,2)+(2,3)g+\&c}$$

$$=\frac{[3]g+[1,3]+[2,3]f+\&c}{(3)g+(1,3)+(2,3)f+\&c}$$

Le nombre de ces équations eſt, comme l'on voit, égal à celui des inconnues f, g, &c, K; par conſéquent elles déterminent exactement ces inconnues; & comme en retenant pour premier membre le terme K, & le multipliant reſpectivement par le dénominateur du ſecond, on a des équations linéaires en f, g, &c, il ſera facile de les éliminer par les méthodes connues, & il n'eſt pas difficile de voir par les formules générales d'élimination, que la réſultante en K ſera d'un degré égal à celui des équations, & par conſéquent égal à celui des équations différentielles propoſées; de ſorte que l'on aura pour K un pareil nombre de différentes valeurs, dont chacune étant ſubſtituée dans les expreſſions de f, g, &c, donnera les valeurs correſpondantes de ces quantités.

Maintenant l'équation $\frac{d^2\xi}{dt^2}+K\xi=0$, donne par l'intégration

tégration $\xi = E \sin(t\sqrt{K} + \varepsilon)$, E, ε étant des conſtantes arbitraires; ainſi comme on a ſuppoſé $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$, &c, on a auſſi les valeurs de ψ, φ, &c. Cette ſolution n'eſt que particuliere, mais elle eſt en même-tems double, triple, &c, ſelon le nombre des valeurs de K; par conſéquent en les joignant enſemble, on aura la ſolution générale, puiſque d'un côté la ſomme des valeurs particulieres de ξ, ψ, φ, &c, ſatisfera également aux équations différentielles, à cauſe de leur forme linéaire, & que de l'autre cette ſomme contiendra deux fois autant de conſtantes arbitraires qu'il y a d'équations, & par conſéquent autant que les intégrales complettes peuvent en admettre.

Dénotant donc par K', K'', K''', &c, les différentes valeurs de K, c'eſt-à-dire, les racines de l'équation en K, & par f', g', &c, f'', g'', &c, f''', g''', &c, &c, les valeurs correſpondantes de f, g, &c; & prenant un pareil nombre de coëfficiens arbitraires E', E'', E''', &c, & d'angles auſſi arbitraires ε', ε'', ε''', &c; on aura ces valeurs complettes de ξ, ψ, φ, &c,

$$\xi = E' \sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + E'' \sin(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + E''' \sin(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \&c$$

$$\psi = f'E' \sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + f''E'' \sin(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + f'''E''' \sin(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \&c$$

$$\varphi = g'E' \sin(t\sqrt{K'} + \varepsilon') + g''E'' \sin(t\sqrt{K''} + \varepsilon'') + g'''E''' \sin(t\sqrt{K'''} + \varepsilon''') + \&c$$

&c,

dans leſquelles les arbitraires E', E'', E''', &c, ε', ε'', ε''', &c, dépendront des valeurs initiales de ξ, ψ, φ, &c, & $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, &c.

11. Comme la ſolution précédente eſt fondée ſur la ſuppoſition que les variables ξ, ψ, φ, &c, ſoient très-petites, il faut pour qu'elle ſoit légitime, que cette ſuppoſition ait lieu en effet ; ce qui demande que les racines K', K'', &c, ſoient toutes réelles, poſitives & inégales, afin que le tems t qui croît à l'infini, ſoit toujours renfermé ſous les ſignes de ſinus. Si quelques-unes de ces racines devenoient négatives ou imaginaires, elles introduiroient dans les ſinus correſpondans des exponentielles réelles, & ſi elles devenoient ſimplement égales, elles y introduiroient des puiſſances algébriques de l'arc ; c'eſt de quoi on peut s'aſſurer en mettant dans le premier cas, à la place des ſinus, leurs expreſſions exponentielles imaginaires, & en ſuppoſant dans le ſecond que les racines égales different entr'elles de quantités infiniment petites indéterminées ; mais comme le développement de ces cas eſt inutile pour l'objet préſent, nous ne nous y arrêterons point.

Si la condition de la réalité & de l'inégalité des coëfficiens de t a lieu, il eſt viſible que les plus grandes valeurs de ξ, de , &c, ſeront moindres que les ſommes de

$$E',\ E'',\ E''',\ \&c,\ \text{de}\ f'\,E',\ f''\,E'',\ f'''\,E''',\ \&c,$$

en prenant toutes ces quantités poſitivement ; par conſéquent ſi elles ſont fort petites, on ſera aſſuré que les valeurs des variables le ſeront toujours auſſi.

Mais comme les coëfficiens E', E'', E''', &c, ſont arbitraires & dépendent uniquement du déplacement primitif du ſyſtême, il eſt poſſible que les variables ξ, ψ, &c, reſtent fort petites, quand même parmi les quantités $\sqrt{K'}$, $\sqrt{K''}$, &c, il y en auroit d'imaginaires ou d'égales ; car il ſuffit pour cela

que les quantités correſpondantes E', E'', &c, ſoient nulles, ce qui fera diſparoître les termes qui croîtroient avec le tems t. Alors la ſolution, ſans être exacte en général, le ſera néanmoins dans le cas particulier où la condition précédente aura lieu.

12. Quant à la détermination des conſtantes arbitraires E', E'', &c, ϵ', ϵ' &c, elle dépend, comme nous l'avons déja dit, de l'état initial du ſyſtême. En effet, ſi dans les expreſſions trouvées de ξ, ψ, φ, &c, on fait $t = 0$, & qu'on ſuppoſe données les valeurs de ξ, ψ, φ, &c, on aura des équations linéaires entre les inconnues $E' \sin \epsilon'$, $E'' \sin \epsilon''$, &c, par leſquelles on pourra déterminer chacune de ces inconnues. De même ſi on fait $t = 0$ dans les différentielles des mêmes expreſſions, & qu'on regarde auſſi comme données les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, &c, on aura un ſecond ſyſtême d'équations linéaires entre $E' \cos \epsilon'$, $E'' \cos \epsilon''$, &c, leſquelles ſerviront à leur détermination. De-là on tirera aiſément les valeurs de E', E'', &c, ainſi que de tang ϵ', tang ϵ'', &c; & enfin celles des angles mêmes ϵ', ϵ'', &c.

Mais voici un moyen fort ſimple de déterminer ces inconnues directement & ſans les embarras de l'élimination.

Je remarque qu'en ajoutant enſemble les équations différentielles de l'article 9, après avoir multiplié la ſeconde par f, la troiſieme par g, & ainſi de ſuite; & faiſant pour abréger

$$p = (1) + (1,2) f + (1,3) g + \&c,$$

$$P = [1] + [1,2] f + [2,3] g + \&c,$$

$$q = (2) f + (1,2) + (2,3) g + \&c,$$

$$Q = [2]f + [1,2] + [2,3]g + \&c,$$
$$r = (3)g + (1,3) + (2,3)f + \&c,$$
$$R = [3]g + [1,3] + [2,3]f + \&c,$$
&c.

on a l'équation

$$0 = p\frac{d^2\xi}{dt^2} + q\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c,$$
$$+ P\xi + Q\psi + R\varphi + \&c.$$

Mais par les équations de condition de l'article 10, on a $P = Kp$, $Q = Kq$, $R = Kr$, &c. Donc ſubſtituant dans l'équation précédente, elle deviendra de la forme

$$0 = \frac{d^2.(p\xi + q\psi + r\varphi + \&c)}{dt^2} + (p\xi + q\psi + r\varphi + \&c)K$$

dont l'intégrale eſt

$$p\xi + q\psi + r\varphi + \&c = L\,\text{ſin}\,(t\sqrt{K} + \lambda),$$

L & λ étant deux conſtantes arbitraires.

Cette équation doit avoir lieu également pour toutes les différentes valeurs de K qui réſultent des mêmes équations de condition, & que nous avons dénotées par K', K'', &c. Ainſi, déſignant de même par p', p'', &c, q', q'', &c, &c, les valeurs correſpondantes de p, q, &c, & prenant différentes conſtantes arbitraires L', L'', &c, λ', λ'', &c, on aura les équations ſuivantes,

$$p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \&c = L'\,\text{ſin}\,(t\sqrt{K'} + \lambda'),$$
$$p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \&c = L''\,\text{ſin}\,(t\sqrt{K''} + \lambda''),$$
$$p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \&c = L'''\,\text{ſin}\,(t\sqrt{K'''} + \lambda'''),$$
&c.

Ces équations ſerviroient également à déterminer les valeurs de ξ, ψ, φ, &c, & il eſt clair que ces valeurs devroient coïncider avec celles qu'on a trouvées ci-deſſus (art. 10), puiſqu'elles réſultent les unes & les autres des mêmes équations différentielles. Ainſi en ſubſtituant ces mêmes valeurs de l'article cité dans les équations précédentes, elles devront devenir entiérement identiques.

D'où il eſt facile de conclure que pour la premiere équation, on aura

$\lambda' = \varepsilon'$, $L' = (p' + f' q' + g' r' + \&c) E'$, & $p' + f'' q' + g'' r' + \&c = 0$, $p' + f''' q' + g''' r' + \&c = 0$, &c; que l'on aura de même pour la ſeconde équation

$\lambda'' = \varepsilon''$, $L'' = (p'' + f'' q'' + g'' r'' + \&c) E'$, & $p'' + f' q'' + g' r'' \&c = 0$, $p'' + f''' q'' + g''' r'' + \&c = 0$, &c; & ainſi des autres.

Donc ſubſtituant dans les équations ci-deſſus pour λ', L', λ'', L'', λ''', L''', &c, les valeurs qu'on vient de trouver, on aura celles-ci,

$$E' \sin (t \sqrt{K'} + \varepsilon') = \frac{p' \xi + q' \psi + r' \varphi + \&c}{p' + q' f' + r' g' + \&c}$$

$$E'' \sin (t \sqrt{K''} + \varepsilon'') = \frac{p'' \xi + q'' \psi + r'' \varphi + \&c}{p'' + q'' f'' + r'' g'' + \&c}$$

$$E''' \sin (t \sqrt{K'''} + \varepsilon''') = \frac{p''' \xi + q''' \psi + r''' \varphi + \&c}{p''' + q''' f''' + r''' g''' + \&c}$$

&c.

qui ſont les réciproques de celles de l'article 10.

Maintenant la détermination des arbitraires E', E'', &c, ε', ε'', n'a plus de difficulté; car, 1°. en ſuppoſant $t = 0$,

les premiers membres des équations précédentes deviennent E' ſin ε', E'' ſin ε'', &c, & les ſeconds ſont tous connus, en ſuppoſant les valeurs de ξ, ψ, φ, &c, données dans le premier inſtant. 2°. En différentiant les mêmes équations, & ſuppoſant enſuite $t = 0$, les premiers membres ſeront $\sqrt{K'}.E'$ coſ ε', $\sqrt{K''}.E''$ coſ ε'', &c, & les ſeconds ſeront auſſi tous connus, en regardant comme données les quantités $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ &c, lorſque $t = 0$. Donc, &c.

13. La ſolution du problême eſt donc réduite uniquement à la détermination des quantités K, f, g, h, &c; & nous avons vu dans l'article 10 que cette détermination dépend de la réſolution des équations $pK - P = 0$, $qK - Q = 0$, $rK - R = 0$, &c, en conſervant les expreſſions de p, q, r, &c, P, Q, R, &c, de l'article 12.

Or ſi on repréſente par A ce que devient la quantité T en y changeant $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, &c, en e, f, g, &c, & par B ce que devient la partie de la quantité V, où les variables ξ, ψ, φ, &c, forment enſemble deux dimenſions, en changeant de même ces variables en e, f, g, &c; il eſt aiſé de voir, & on pourroit même s'en convaincre *à priori* que l'on aura $p = \frac{dA}{de}$, $q = \frac{dA}{df}$, $r = \frac{dA}{dg}$, &c, $P = \frac{dB}{de}$, $Q = \frac{dB}{df}$, $R = \frac{dB}{dg}$, &c, en faiſant enſuite $e = 1$.

Donc en général ſi on fait $AK - B = \Delta$, les équations pour la détermination des inconnues K, f, g, &c, ſeront $\frac{d\Delta}{de} = 0$, $\frac{d\Delta}{df} = 0$, $\frac{d\Delta}{dg} = 0$, &c, en ſuppoſant $e = 1$.

Ainſi comme la quantité Δ ſe forme immédiatement des quantités T & V, on pourra auſſi trouver directement les équations dont il s'agit, ſans avoir beſoin de les déduire des équations différentielles du mouvement du ſyſtême.

Je remarque maintenant que puiſque Δ eſt une fonction homogène de deux dimenſions de e, f, g, &c, on aura par la propriété de ces ſortes de fonctions démontrée dans l'article 5,

$$2\Delta = e\frac{d\Delta}{de} + f\frac{d\Delta}{df} + g\frac{d\Delta}{dg} + \&c.$$

Donc on aura auſſi $\Delta = 0$; par conſéquent les inconnues f, g, h, &c, doivent être telles, que non-ſeulement la quantité Δ ſoit nulle, mais que chacune de ſes différentielles relatives à ces inconnues le ſoit auſſi; d'où il s'enſuit que la quantité K regardée comme une fonction de ces inconnues dépendante de l'équation $\Delta = 0$, devra être un *maximum* ou un *minimum*.

Si on fait d'abord $e = 1$, & qu'on remplace par $\Delta = 0$ l'équation $\frac{d\Delta}{de} = 0$, on aura pour la détermination des inconnues f, g, h, &c, les équations $\Delta = 0$, $\frac{d\Delta}{df} = 0$, $\frac{d\Delta}{dg} = 0$, &c; ſi donc on tire d'abord la valeur de f de l'équation $\frac{d\Delta}{df} = 0$, & qu'en la ſubſtituant dans $\Delta = 0$, on change cette équation en $\Delta' = 0$, il n'y aura qu'à faire enſuite $\frac{d\Delta'}{dg} = 0$, & ſubſtituer de même la valeur de g tirée de cette derniere équation dans $\Delta' = 0$; alors nommant $\Delta'' = 0$ l'équation réſultante, on fera de nouveau

$\frac{d\Delta''}{dk} = 0$, & ainſi de ſuite. Par ce moyen on parviendra à une équation finale qui ne contiendra plus les inconnues f, g, h, &c, mais ſeulement la quantité K, & qui ſera l'équation cherchée en K, dont les racines ont été nommées K', K'', K''', &c.

On peut même réduire cette équation en une formule générale, en conſidérant que puiſque les quantités f, g, h, &c, ne forment enſemble dans la valeur de Δ que deux dimenſions, la quantité $\frac{2\Delta d^2\Delta - d\Delta^2}{df^2}$ ſera néceſſairement ſans f, ſa différentielle relative à f étant $\frac{2\Delta d^3\Delta}{df^2}$ & par conſéquent nulle. De ſorte qu'on pourra faire $\Delta' = \frac{2\Delta d^2\Delta - d\Delta^2}{df^2}$; & comme dans cette quantité Δ' les inconnues reſtantes g, h, &c, ne montent auſſi qu'à la ſeconde dimenſion, on pourra faire de même $\Delta'' = \frac{2\Delta' d^2\Delta' - d\Delta'^2}{dg^2}$; & ainſi de ſuite. La derniere des quantités Δ, Δ', Δ'', &c, étant égalée à zéro, ſera l'équation cherchée en K. Il eſt vrai que cette équation pourra monter à un degré plus haut qu'il ne faut, à cauſe des facteurs étrangers introduits dans les équations $\Delta'' = 0$, $\Delta''' = 0$, &c; mais ſi en développant ces équations, on a ſoin de les débarraſſer ſucceſſivement de ces mêmes facteurs, & de ne prendre enſuite pour les valeurs de Δ'', Δ''', &c, que leurs premiers membres ainſi ſimplifiés, l'équation finale ſe trouvera rabaiſſée d'elle-même à la forme & au degré dont elle doit être.

Quant aux valeurs de f, g, &c, on les déterminera enſuite par les équations $\frac{d\Delta}{df} = 0$, $\frac{d\Delta'}{dg} = 0$, &c, en com-

mençant par la derniere, & remontant à la premiere par la ſubſtitution ſucceſſive des valeurs trouvées.

14. On a vu dans l'article 11 que la ſolution n'eſt bonne en général que lorſque les racines de l'équation en K ſont toutes réelles, poſitives & inégales. Or on a des méthodes pour reconnoître ſi une équation donnée de quelque degré qu'elle ſoit a toutes ſes racines réelles ou non, & pour juger dans le cas de la réalité, de leur ſigne & de leur inégalité, mais l'application de ces méthodes étant toujours un peu pénible, voici quelques caracteres ſimples & généraux qui ſerviront à juger de la forme des racines dont il s'agit dans un grand nombre de cas.

En prenant l'équation $\Delta = 0$, ou $AK - B = 0$, (art. préc.) on a $K = \frac{B}{A}$; or il eſt facile de ſe convaincre que la quantité A a toujours néceſſairement une valeur poſitive, tant que f, g, &c, ſont des quantités réelles; car la fonction T d'où elle réſulte en changeant $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, &c, en 1, f, g, &c, eſt compoſée de la ſomme de pluſieurs carrés multipliés par des coëfficiens néceſſairement poſitifs. Donc ſi la quantité B eſt auſſi toujours poſitive, ce qui a lieu lorſque la partie de la fonction V, où les variables ξ, ψ, φ, &c, forment enſemble deux dimenſions, eſt réductible à la même forme que la fonction T; on eſt aſſuré que les valeurs de K, c'eſt-à-dire, les racines de l'équation en K ſeront toujours poſitives toutes les fois qu'elles ſeront réelles. Au contraire, ſi la quantité B eſt toujours négative, ce qui arrivera quand elle ſera compoſée de pluſieurs carrés multipliés par des coëfficiens négatifs, les valeurs de K ſeront toutes négatives. Dans ce dernier cas la ſolution

ne pourra pas être bonne, parce que les racines de l'équation en K ne peuvent être qu'imaginaires ou réelles négatives; & qu'ainsi les expressions des variables ξ, ψ, &c, contiendront nécessairement le tems t hors des signes de sinus & cosinus.

Dans le premier cas on voit seulement que si les racines sont réelles, elles sont nécessairement positives; & il seroit peut-être difficile de démontrer directement qu'elles doivent en même-tems être réelles; mais on peut se convaincre d'une autre maniere que cela doit être ainsi. En effet, l'intégrale $T + V =$ const, ayant nécessairement lieu, puisque T & V sont fonctions sans t; si on désigne par V' la partie de V qui contient les termes de deux dimensions, ensorte que $V = H + V'$ à cause de $H1 = 0$, $H2 = 0$, $H3 = 0$, &c (art. 8, 9), on aura $T + H + V' =$ const. $= (T) + H + (V')$ en dénotant par (T) & (V') les valeurs de T & V' au premier instant; donc $T + V' = (T) + (V')$. Donc, T étant par sa forme une quantité toujours positive, & V' l'étant aussi par l'hypothèse, il s'ensuit qu'on aura nécessairement $V' > 0$, & $< (T) + (V')$; donc la valeur de V', & conséquemment aussi celles des variables ξ, ψ, φ, &c, seront renfermées dans des limites données & dépendantes uniquement de l'état initial. Ces variables ne pourront donc pas contenir le tems t hors des signes de sinus & cosinus, parce qu'alors elles pourroient aller en croissant à l'infini. Donc les racines de l'équation en K seront nécessairement toutes réelles, positives & inégales (art. 11).

15. C'est de cette maniere que nous avons démontré à la fin de la troisieme Section de la Statique, que lorsque la fonction Φ est un *minimum* dans l'état d'équilibre, cet état est stable, c'est-à-dire, que le systême en étant tant soit peu

dérangé, ne peut faire que de petites oscillations. Il est visible, en effet, que la fonction nommée Φ dans l'article 13 de la Section citée, est la même que nous représentons ici par V, puisque l'une & l'autre est l'intégrale de la totalité des momens des forces agissantes sur les différens corps du systême, totalité qui doit être nulle dans l'équilibre. Ainsi comme l'on a $V = H + V'$, & que V' ne contient les variables ξ, ψ, φ, &c, qu'à la seconde dimension, il s'ensuit que V sera un *minimum* ou un *maximum*, selon que la valeur de V sera positive ou négative en donnant à ces variables des valeurs quelconques. Or faisant $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$ &c, la valeur de V' devient $= \xi^2 B$ (art. 13), e étant $= 1$; donc V ou Φ sera un *minimum* lorsque B sera une quantité toujours positive, & un *maximum* lorsque B sera toujours une quantité négative. Par conséquent dans le premier cas les expressions des variables ne contiendront le tems t que sous les signes de sinus & de cosinus, & l'équilibre sera stable; dans le second elles contiendront nécessairement des termes où t sera hors de ces signes, & l'équilibre ne pourra pas être stable, mais le systême en étant tant soit peu déplacé, s'en éloignera toujours davantage. Cette seconde partie du théorême énoncé dans l'endroit cité de la Statique, n'auroit pu y être démontrée faute des principes nécessaires; nous en avions remis la démonstration à la Dynamique, & celle que nous venons de donner ne laisse plus rien à desirer.

Au reste, entre ces deux états de stabilité & de non stabilité absolue, dans lesquels l'équilibre étant tant soit peu dérangé d'une maniere quelconque, tend à se rétablir de lui-même, ou à se déranger de plus en plus, il peut y avoir des états de stabilité conditionnelle & relative, dans lesquels le rétablis-

ſement de l'équilibre dépendra du déplacement initial du ſyſtême. Car ſi quelques-unes des valeurs de $\sqrt{K}$ ſont imaginaires, les termes correſpondans dans les valeurs des variables contiendront des arcs de cercle, & l'équilibre ne ſera pas ſtable en général; mais ſi les coëfficiens de ces termes deviennent nuls, ce qui dépend de l'état initial du ſyſtême, les arcs de cercle diſparoîtront, & l'équilibre pourra encore être regardé comme ſtable, du moins par rapport à cet état particulier.

16. La ſolution que nous venons de donner, demande que les coordonnées puiſſent être exprimées par des fonctions en ſérie de variables très-petites, & qui ſoient nulles dans l'état d'équilibre, ainſi que nous l'avons ſuppoſé dans l'article 7.

Or c'eſt ce qui eſt toujours poſſible, comme nous l'avons vu, lorſque les équations de condition réduites en ſérie contiennent les premieres puiſſances des variables ſuppoſées très-petites, parce que ces termes donnent d'abord des équations réſolubles rationellement, & qu'enſuite on peut toujours, par la méthode des ſéries, avoir des ſolutions rationelles de plus en plus exactes.

Il peut néanmoins arriver que les termes de la premiere dimenſion manquent dans une ou pluſieurs des équations de condition, ce qui aura lieu, par exemple, ſi dans l'équation $L = 0$, les valeurs des coordonnées pour l'équilibre ſont telles, qu'elles rendent non-ſeulement L nulle, mais auſſi chacune de ſes différences premieres; car on aura alors $\frac{dA}{da} = 0$, $\frac{dA}{db} = 0$, &c, & l'équation $L = 0$, ne contiendra que les ſecondes puiſſances & les ultérieures de α, β, γ, α' &c, (art. 7). Dans ce cas ſi on réduit les coor-

données en fonctions de variables indépendantes, ces fonctions ne pourront plus être rationelles, & les équations différentielles ne seront ni linéaires, ni même rationelles. Ainsi la supposition des mouvemens très-petits du systême ne servira pas alors à simplifier la solution du problême, ou du moins ne la rendra pas susceptible de la méthode générale que nous avons exposée.

Pour résoudre ces sortes de questions de la maniere la plus simple, on fera d'abord abstraction des équations de condition, où les premieres dimensions des variables ne se trouveroient pas; on parviendra ainsi à des expressions de T & de V de la forme de celles de l'article 8. Ensuite on ajoutera à cette valeur de V les premiers membres des équations de condition auxquelles on n'aura pas encore eu égard, multipliés chacun par un coëfficient indéterminé, & qu'on supposera constant dans les différentiations par δ; & il suffira dans ces termes dûs aux équations de condition, de tenir compte des plus basses dimensions des variables très-petites. De-là on trouvera les équations différentielles à l'ordinaire, & il s'agira d'en éliminer les coëfficiens indéterminés.

Si les équations de condition étoient du second degré, & que les coëfficiens indéterminés pussent être supposés constans, la valeur de V seroit encore de la même forme que dans la solution générale; par conséquent on pourroit l'appliquer aussi à ce cas; on détermineroit ensuite les coëfficiens, ensorte que les équations de condition fussent satisfaites. On pourra donc toujours commencer par adopter cette supposition, on verra ensuite si les valeurs qui en résultent pour les variables, peuvent satisfaire aux équations

de condition, auquel cas la ſuppoſition ſera légitime, & la ſolution exacte; ſinon il faudra chercher à intégrer les équations différentielles par des méthodes particulieres.

§. II.

Du mouvement d'un corps attiré vers un ou pluſieurs centres.

17. Suppoſons en premier lieu que le corps ſoit attiré vers un ſeul centre fixe, par une force R, fonction de la diſtance r du corps au centre. Prenons ce centre pour l'origine des coordonnées, & la droite r pour le rayon vecteur; ſoit de plus ψ l'inclinaiſon de r ſur le plan des x & y, & φ l'angle de la projection de r ſur ce plan, avec l'axe des x; on aura donc, comme on l'a déja vu plus haut, (art. 2), $x = r \operatorname{cof} \psi \operatorname{cof} \varphi$, $y = r \operatorname{cof} \psi \operatorname{fin} \varphi$, $z = r \operatorname{fin} \psi$; & de la

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 (\operatorname{cof} \psi^2 \, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2.$$

Ainſi n'y ayant qu'un ſeul corps, dont la maſſe peut être priſe pour l'unité, la quantité T ſera ſimplement égale à . . . . $\frac{r^2 (\operatorname{cof} \psi^2 \, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2}$.

A l'égard de la quantité V, elle ſe réduira à $\int R\,dr$.

Donc puiſqu'il n'y a aucune condition particuliere à remplir, & que les trois variables ψ, φ, r ſont indépendantes, on aura pour chacune de ces variables une équation de la forme $d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi} = 0$; ce qui donnera les trois équations (dt étant conſtant) $\frac{d.r^2 d\psi}{dt^2} + \ldots$ $+ \frac{r^2 \operatorname{fin} \psi \operatorname{cof}. \psi \, d\varphi^2}{dt^2} = 0$, $\frac{d.r^2 \operatorname{cof} \psi^2 \, d\varphi}{dt^2} = 0$,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + R = 0.$$

La seconde est intégrable par elle-même, & son intégrale est

$$\frac{r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{dt} = A;$$

d'où l'on tire $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2 \cos\psi^2}$;

cette valeur étant substituée dans la premiere, elle devient aussi intégrable si on la multiplie par $r^2 d\psi$, & l'intégrale sera

$$\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + \frac{A^2}{\cos\psi^2} = B^2,$$

A & B sont deux constantes arbitraires.

Je remarque d'abord sur cette intégrale, que si on suppose que ψ & $\frac{d\psi}{dt}$ soient à la fois nuls dans un instant, ils seront nécessairement toujours nuls; car faisant $\psi = 0$, & $d\psi = 0$, on aura $B^2 = A^2$; & l'équation deviendra alors $\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + A^2 \operatorname{tang}\psi^2 = 0$, qui ne peut avoir lieu qu'en faisant ψ & $\frac{d\psi}{dt}$ nuls. Or la supposition dont il s'agit revient à faire ensorte que le corps se meuve dans un instant dans le plan des x & y; ce qui est toujours possible, puisque la position de ce plan est arbitraire. Alors donc le corps continuera à se mouvoir dans ce plan; par conséquent il décrira nécessairement une orbite plane ou ligne à simple courbure. C'est ce qu'on peut démontrer aussi directement par l'intégration même de l'équation dont il s'agit.

En effet, si on y substitue pour dt sa valeur $\frac{r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{A}$

tirée de la précédente, on aura celle-ci,

$$\frac{A^2 d\psi^2}{\cos\psi^4 d\varphi^2} + \frac{A^2}{\cos\psi^2} = B^2.$$

Soit lorsque $\psi = 0$, $\frac{d\psi}{d\varphi} = \tan \alpha$, on aura $B^2 = A^2 + A^2 \tan \alpha^2$, & l'équation deviendra $\frac{d\psi^2}{\cos\psi^4 d\varphi^2} = \tan \alpha^2 - \tan \psi^2$, d'où l'on tire $d\varphi = \frac{d\psi}{\cos\psi^2 \sqrt{\tan \alpha^2 - \tan \psi^2}}$, laquelle à cause de $\frac{d\psi}{\cos\psi^2} = d.\tan \psi$, aura pour intégrale $\varphi - \beta =$ arc. sin $\frac{\tan \psi}{\tan \alpha}$, savoir, $\frac{\tan \psi}{\tan \alpha} = \sin(\varphi - \beta)$, β étant la valeur arbitraire de φ lorsque $\psi = 0$.

Cette équation fait voir que $\varphi - \beta$ & ψ sont les deux côtés d'un triangle sphérique rectangle, dans lequel α est l'angle opposé au côté ψ. Ainsi, puisque l'arc $\varphi - \beta$ est pris sur le plan des x & y, & que l'arc ψ est toujours perpendiculaire à ce même plan, il s'ensuit que l'arc qui joint ces deux-ci, & qui forme l'hypothénuse du triangle, fera avec la base $\varphi - \beta$ un angle constant α; par conséquent le même arc passera par les extrémités de tous les arcs ψ, & tous les rayons r se trouveront dans le plan de cet arc, lequel sera ainsi le plan même de l'orbite du corps, dont l'inclinaison sur le plan des x & y sera exprimée par l'angle constant α.

18. L'équation finie qu'on vient de trouver entre φ & ψ, pourroit servir à éliminer une de ces inconnues des autres équations; mais puisqu'on est assuré que l'orbite du corps est toute dans un plan fixe, on simplifiera beaucoup le calcul

en

en prenant ce plan pour celui des x & y, ce qui donnera $\psi = 0$ & $d\psi = 0$.

Alors la troisieme équation deviendra $\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r d\varphi^2}{dt^2} + R = 0$; mais l'intégrale de la seconde donne $d\varphi = \frac{A dt}{r^2}$; donc substituant cette valeur de $d\varphi$, & multipliant ensuite par dr, on aura une équation intégrable, dont l'intégrale sera $\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{A^2}{r^2} + \int R dr = C$; d'où l'on tire

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{C - \int R dr - \frac{A^2}{r^2}}},$$

& ensuite

$$d\varphi = \frac{A dr}{r^2 \sqrt{C - \int R dr - \frac{A^2}{r^2}}};$$

équations séparées, & dont l'intégration fera connoître les valeurs de φ & t en r. La seconde de ces équations donnera la figure de l'orbite, & la premiere la position du corps à chaque instant.

19. Pour appliquer cette solution au mouvement des Planetes autour du Soleil, on fera $R = \frac{F}{r^2}$, F étant la force attractive du soleil sur la Planete à la distance 1; ce qui donnera $\int R dr = -\frac{F}{r}$.

Substituant cette valeur dans les équations précédentes, on voit que la quantité sous le signe deviendra $C + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}$, qu'on peut mettre sous la forme $C + \frac{F^2}{4 A^2}$

$-\left(\frac{F}{2A}-\frac{A}{r}\right)^2$; alors la valeur de $d\varphi$ se trouvera égale à la différentielle de l'angle, dont le cosinus sera $\frac{\frac{F}{2A}-\frac{A}{r}}{\sqrt{\left(C+\frac{F^2}{4A^2}\right)}}$; de sorte qu'on aura en intégrant & introduisant une constante arbitraire γ,

$$\frac{F}{2A}-\frac{A}{r}=\sqrt{\left(C+\frac{F^2}{4A^2}\right)}\times\text{cos}\,(\varphi-\gamma);$$

d'où en faisant pour abréger

$$p=\frac{2A^2}{F},\ e=\sqrt{\left(1+\frac{4A^2C}{F^2}\right)},$$

on aura $r=\frac{p}{1-e\,\text{cos}\,(\varphi-\gamma)}$,

On voit par cette formule que les plus grandes & plus petites valeurs de r répondent à $\varphi=\gamma$ & à $\varphi=\gamma+180^\circ$, & qu'ainsi elles sont sur une même droite. La plus petite valeur sera $=\frac{p}{1+e}$, & la plus grande sera $=\frac{p}{1-e}$, dont la demi-somme ou la valeur moyenne sera $\frac{p}{1-e^2}$, & la demi-différence sera $\frac{pe}{1-e^2}$; de sorte que e sera le rapport de la demi-différence de ces valeurs à leur demi-somme. Si on fait $\varphi=\gamma+90^\circ$; auquel cas la direction de r sera perpendiculaire à la ligne des plus petites & plus grandes valeurs, on aura alors $r=p$.

Pour connoître la nature de la courbe, il n'y a qu'à la rapporter à deux coordonnées, x & y, prises depuis le centre des rayons vecteurs, & dont l'une x soit dans la direction du plus grand rayon. On aura ainsi, puisque $\varphi-\gamma$

eſt l'angle de r avec ce rayon, $x = r \operatorname{cof}(\varphi - \gamma)$, $y = r \operatorname{fin}(\varphi - \gamma)$; & l'équation $r - e r \operatorname{cof}(\varphi - \gamma) = p$ deviendra $\sqrt{(x^2 + y^2)} - e x = p$, laquelle étant délivrée de l'irrationalité monte au ſecond degré, & donne une ſection conique. Donc $\frac{p}{1 - e^2}$ ſera le demi-grand axe de la ſection que nous dénoterons par a, & e ſera l'excentricité ou le rapport de la diſtance entre l'un des foyers & le centre, au demi-grand axe, conſéquemment $\sqrt{(a^2 - a^2 e^2)}$ ou $a\sqrt{(1 - e^2)}$ ſera le demi-petit axe, & $\frac{a^2(1 - e^2)}{a}$ ou $a(1 - e^2)$, c'eſt-à-dire, p ſera le demi-parametre. Mais par l'équation entre x & y, on a lorſque $x = 0$, $p = y$; donc l'origine des coordonnées eſt dans l'un des foyers où l'on fait que l'ordonnée eſt égale au demi-parametre.

Ainſi les orbites des Planetes ſont des ſections coniques, qui ont le Soleil dans l'un de leurs foyers, & leur équation générale eſt $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \operatorname{cof}(\varphi - \gamma)}$, a étant la diſtance moyenne, e l'excentricité, & r le rayon vecteur, qui fait avec la ligne de l'aphélie l'angle $\varphi - \gamma$.

20. Pour déterminer le tems employé à décrire un angle quelconque, il faut intégrer encore l'autre équation $dt = \frac{dr}{\sqrt{\left(C + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$; mais auparavant nous y ſubſtituerons pour A & C leurs valeurs en a & e; or $p = \frac{2A^2}{F}$, & $e = \sqrt{\left(1 + \frac{4A^2 C}{F^2}\right)}$, donc $A^2 = \frac{Fp}{2} = \frac{Fa(1 - e^2)}{2}$, $C = \frac{(e^2 - 1)F^2}{4A^2} = -\frac{F}{2a}$; par ces ſubſtitutions l'équation dont il s'agit deviendra

$$dt = \sqrt{\frac{2a}{F}} \times \frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2e^2 - (r-a)^2)}}.$$

Faisons $\frac{r-a}{ae} = \operatorname{cof}\theta$, ce qui donne $r = a(1 + e\operatorname{cof}\theta)$; on aura $dt = \sqrt{\frac{2a^3}{F}} \times (1 + e\operatorname{cof}\theta)\,d\theta$; & intégrant $t - \lambda = \sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)} \times (\theta + e\operatorname{fin}\theta)$.

Or en comparant les deux expressions de r, on a . . . $\frac{1-e^2}{1-e\operatorname{cof}(\varphi-\gamma)} = 1 + e\operatorname{cof}\theta$; d'où l'on tire $\operatorname{cof}\theta = \frac{\operatorname{cof}(\varphi-\gamma)-e}{1-e\operatorname{cof}(\varphi-\gamma)}$; ainsi en éliminant θ, on aura t en fonction de $\varphi - \gamma$; & pour faciliter cette élimination, on observera que $1 \pm \operatorname{cof}\theta = \frac{(1\mp e)(1\pm\operatorname{cof}(\varphi-\gamma))}{1-e\operatorname{cof}(\varphi-\gamma)}$; de sorte qu'en faisant cette combinaison $\frac{1-\operatorname{cof}\theta}{1+\operatorname{cof}\theta} = \frac{1+e}{1-e} \times \frac{1-\operatorname{cof}(\varphi-\gamma)}{1+\operatorname{cof}(\varphi+\gamma)}$, on aura $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}.\operatorname{tang}\frac{\varphi-\gamma}{2}$.

21. On appelle en Astronomie l'angle $\varphi - \gamma$ l'anomalie vraie, l'angle $(t-\lambda)\sqrt{\frac{F}{2a^3}}$ l'anomalie moyenne, & l'angle auxiliaire θ l'anomalie excentrique; & le problême de déterminer $\varphi - \gamma$ par $t - \lambda$ est connu sous le nom de problême de Kepler. On voit par les formules précédentes, qu'il ne peut être résolu rigoureusement ; mais en supposant l'excentricité e fort petite, comme elle l'est dans les orbites de toutes les planetes, on peut avoir des solutions aussi approchées que l'on voudra.

On commencera par tirer de l'équation $\operatorname{tang}\frac{\varphi-\gamma}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$ tang $\frac{\theta}{2}$ la valeur de $\varphi-\gamma$ en θ; ce qu'on obtiendra aisément par le moyen des expressions exponentielles imaginaires connues. En effet, en faisant pour abréger $\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}=h$, & prenant i pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura cette transformée

$$\frac{i^{\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}-i^{-\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}}{i^{\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}+i^{-\frac{\varphi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}}=h\,\frac{i^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}-i^{-\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}}{i^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}+i^{-\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}},$$

laquelle se réduit à celle-ci,

$$\frac{i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}}-1}{i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}}+1}=h\,\frac{i^{\theta\sqrt{-1}}-1}{i^{\theta\sqrt{-1}}+1};$$ d'où l'on tire

$$i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}}=\frac{(1+h)i^{\theta\sqrt{-1}}+1-h}{(1-h)i^{\theta\sqrt{-1}}+1+h},$$ ou bien en faisant

$$\frac{1-h}{1+h}=E,\; i^{(\varphi-\gamma)\sqrt{-1}}=i^{\theta\sqrt{-1}}\times\frac{1+Ei^{-\theta\sqrt{-1}}}{1+Ei^{\theta\sqrt{-1}}};$$

d'où prenant les logarithmes, on aura

$$\varphi-\gamma=\theta+\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left(1+Ei^{-\theta\sqrt{-1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left(1+Ei^{\theta\sqrt{-1}}\right);$$

réduisant ces logarithmes en série, & substituant ensuite à la place des exponentielles imaginaires, les sinus réels qui y répondent, on aura enfin

$$\varphi-\gamma=\theta-2E\sin\theta+\frac{2E^2}{2}\sin 2\theta-\frac{2E^3}{3}\sin 3\theta+\&c.$$

expreſſion fort ſimple, dans laquelle

$$E \text{ ſera} = \frac{\sqrt{(1+e)} - \sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)} + \sqrt{(1-e)}},$$

$$\text{ou bien} = \frac{e}{1+\sqrt{(1-e^2)}}.$$

Il ne s'agira plus maintenant que de ſubſtituer à la place de θ ſa valeur en $t-\lambda$ donnée par l'équation . . . . .

$$(t-\lambda)\sqrt{\frac{F}{2a^3}} = \theta + e \sin \theta.$$

Or par le théorême que j'ai démontré ailleurs, ſi l'on a une équation de la forme $u = \theta + f.\theta$, $f.\theta$ étant une fonction quelconque de θ, on aura réciproquement

$$\theta = u - f.u + \frac{d.(f.u)^2}{2du} - \frac{d^2.(f.u)^3}{2.3du^2} + \&c;$$

& ſi $\Phi.\theta$ dénote une fonction quelconque de θ, & qu'on faſſe $\Phi'.\theta = \frac{d.\Phi.\theta}{d.\theta}$, on aura auſſi

$$\Phi.\theta = \Phi.u - f.u \times \Phi.u + \frac{d.(f.u)^2 \times \Phi'.u}{2du}$$
$$- \frac{d^2.(f.u)^3 \times \Phi'.u}{2.3du^2} + \&c.$$

Ainſi il n'y aura qu'à ſuppoſer $u = \frac{t-\lambda}{\sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)}}$, $f.\theta = e \sin \theta$, & $\Phi.\theta = \theta - 2E \sin \theta + \frac{2E^2}{2} \sin 2\theta - \frac{2E^3}{3} \sin 3\theta + \&c$; par conſéquent en changeant θ en u, $f.u = e \sin u$, $\Phi.u = u - 2E \sin u + \frac{2E^2}{2} \sin 2u - \frac{2E^3}{3} \sin 3u + \&c$; & ſubſtituant ces valeurs dans la for-

mule précédente, on aura l'expreſſion de $\Phi . \theta$, c'eſt-à-dire, celle de $\varphi - \gamma$ en u.

Faiſant pour abréger

$$V = 1 - 2E \operatorname{cof} u + 2E^2 \operatorname{cof} 2u - 2E^3 \operatorname{cof} 3u + \&c,$$

on aura donc

$$\varphi - \gamma = u - 2E \operatorname{fin} u + \frac{2E^2}{2} \operatorname{fin} 2u - \frac{2E^3}{3} \operatorname{fin} 3u + \&c.$$
$$- eV \operatorname{fin} u + e^2 \frac{d.(V \operatorname{fin} u^2)}{2du} - e^3 \frac{d^2.(V \operatorname{fin} u^3)}{2.3du^2} + \&c,$$

où il n'y aura plus qu'à exécuter les différenciations indiquées.

22. Suppoſons en ſecond lieu que le corps ſoit attiré à la fois vers deux centres fixes par des forces proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances.

Soit comme dans le problême précédent, l'un des centres dans l'origine des coordonnées, & R la force attractive; & pour l'autre centre ſuppoſons que ſa poſition ſoit déterminée par les coordonnées a, b, c, paralleles aux x, y, z; ſoit de plus Q ſa force attractive, & q la diſtance du corps à ce centre, il eſt clair qu'on aura

$$q = \sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)},$$

c'eſt-à-dire, en ſubſtituant pour x, y, z leurs valeurs en r, ψ, φ (art. 13),

$$q = \sqrt{(r^2 - 2r((a \operatorname{cof} \varphi + b \operatorname{fin} \varphi) \operatorname{cof} \psi + c \operatorname{fin} \psi) + h^2)},$$

en faiſant $h = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$, diſtance des deux centres.

Il eſt clair que la valeur de T ſera la même que dans le por-

blême précédent (art. 17) mais la valeur de V ſe trouvera augmentée du terme $\int Q\, dq$; & comme Q eſt fonction de q, & q fonction de r, φ, ψ, ce terme donnera dans les différentielles $\frac{\delta V}{\delta \psi}$, $\frac{\delta V}{\delta \varphi}$, $\frac{\delta V}{\delta r}$, ceux-ci $Q \frac{dq}{d\psi}$, $Q \frac{dq}{d\varphi}$, $Q \frac{dq}{dr}$; qu'il faudra par conſéquent ajouter reſpectivement aux premiers membres des équations différentielles de l'article cité.

On aura donc pour le mouvement du corps attiré vers deux centres par les forces R & Q, les équations ſuivantes,

$$\frac{d.\, r^2\, d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2} + Q \frac{dq}{d\psi} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$\frac{d.\, r^2 \cos\psi^2\, d\varphi}{dt^2} + Q \frac{dq}{d\varphi} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\,(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + R + Q \frac{dq}{dr} = 0 \; . \; . \; . \; (3).$$

Et ſi le corps étoit attiré en même-tems vers d'autres centres, il n'y auroit qu'à ajouter à ces équations des termes ſemblables pour chacun de ces centres.

Nous avons déja fait voir en général (art. 4), que lorſque T & V ne contiennent point t, on a toujours l'intégrale $T + V = const$, laquelle renferme la conſervation des forces vives.

Elle ſera donc, dans le cas préſent,

$$\frac{r^2\,(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\, dt^2} + \int R\, dr + \int Q\, dq = 2\, A \; . \; . \; . \; (4) ;$$

& il eſt viſible, en effet, que les trois équations précédentes étant multipliées reſpectivement par $d\psi$, $d\varphi$, dr, & ajoutées enſemble, donnent une équation intégrable, & dont l'intégrale eſt celle que nous venons de préſenter.

On

On tire de cette équation

$$\frac{r^2(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} = 4A - 2\int R\,dr - 2\int Q\,dq - \frac{dr^2}{dt^2},$$

valeur qui étant ſubſtituée dans l'équation (3), multipliée par r, la réduit à

$$\frac{d^2.r^2}{2\,dt^2} + Rr + 2\int R\,dr + Qr\frac{dq}{dr} + 2\int Q\,dq = 4A.$$

Or, puiſque $q^2 = r^2 + h^2 - 2r((a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\psi + c\sin\psi)$, on aura, en faiſant varier r, $q\frac{dq}{dr} = r - (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\psi - c\sin\psi = r - \frac{r^2 + h^2 - q^2}{2r}$ $= \frac{r^2 + q^2 - h^2}{2r}$; donc ſubſtituant cette valeur de $\frac{dq}{dr}$, on aura enfin

$$\frac{d^2.r^2}{2\,dt^2} + Rr + 2\int R\,dr + Q\frac{r^2 + q^2 - h^2}{2q} + 2\int Q\,dq = 4A\ (5).$$

Cette équation a l'avantage qu'elle ne contient que les deux variables r & q, & indique en même tems qu'il doit y avoir une pareille équation entre q & r, en changeant ſimplement r & q, ainſi que R & Q entr'elles; car il eſt indifférent de rapporter le mouvement du corps à l'un ou à l'autre des deux centres fixes, & il eſt clair qu'en le rapportant au centre des forces Q, on trouveroit par une analyſe ſemblable à la précédente,

$$\frac{d^2.q^2}{2\,dt^2} + Qq + 2\int Q\,dq + R\frac{r^2 + q^2 - h^2}{2r} + 2\int R\,dr = 4A\ (6);$$

ainſi on pourra, par ces deux équations, déterminer directement les deux rayons r & q.

Je remarque maintenant qu'on peut ſans rien ôter à la généralité, ſuppoſer les deux coordonnées a & b du centre des forces Q, nulles, ce qui revient à placer l'axe des coordonnées Q dans la ligne qui joint les deux centres. Par cette ſuppoſition, on aura $c = h$, & la quantité q deviendra $\sqrt{(r^2 - 2hr \sin\psi + h^2)}$, laquelle ne contenant plus φ, on aura donc $\frac{dq}{d\varphi} = 0$. Par conſéquent l'équation (2) ſe réduira à $\frac{d . r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{dt^2} = 0$, dont l'intégrale eſt $\frac{r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{dt} = B$; d'où l'on tire $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{r^2 \cos\psi^2}$; mais on a $\sin\psi = \frac{r^2 + h^2 - q^2}{2hr}$; donc $\cos\psi = \frac{\sqrt{(4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2)}}{2hr}$; par conſéquent en ſubſtituant cette valeur, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4Bh^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

de ſorte que connoiſſant r & q en t, on aura auſſi φ en t.

Or, puiſque $\sin\psi$ & $\frac{d\varphi}{dt}$ ſont déja données en r & q, il eſt clair qu'on peut réduire l'équation (4) à ne contenir que r & q, & alors elle ſera néceſſairement, à raiſon de la conſtante arbitraire E, une intégrale complette des deux équations (5) & (6). En effet, on aura

$$r^2 d\psi^2 = \frac{\overline{(r^2 + q^2 - h^2)dr - 2rqdq}^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2};$$

ajoutant dr^2, & réduiſant, il viendra

$$r^2 d\psi^2 + dr^2 = 4\,\frac{q^2r^2dr^2 + r^2q^2dq^2 - (r^2 + q^2 - h^2)rqdrdq}{4h^2r^2(r^2 + h^2 - q^2)^2}.$$

De plus on aura $\frac{r^2 \operatorname{cof} \psi^2 d\varphi^2}{dt^2} = \frac{4B^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2}$. Donc faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation (4), & ôtant le dénominateur, on aura

$$2 \frac{q^2 r^2 dr^2 + r^2 q^2 dq^2 - (r^2 + q^2 - h^2) rq dr dq}{dt^2} + 2B^2$$

$$+ (4h^2 r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2)(\int R dr + \int Q dq - 2A) = 0 \;.\;. \quad (8)$$

Et il eſt facile de voir maintenant d'après la forme de cette équation, qu'elle réſulte des équations (5) & (6) multipliées reſpectivement par $2q^2 d.r^2 - (r^2 + q^2 - h^2) d.q^2$, $2r^2 d.q^2 - (r^2 + q^2 - h^2) d.r^2$, ajoutées enſemble & intégrées enſuite ; mais il auroit été aſſez difficile de découvrir cette intégrale *à priori*.

23. Pour achever la ſolution, il faut avoir encore une autre intégrale des mêmes équations; mais on ne ſauroit y parvenir que pour des valeurs particulieres de R & Q.

Si on ſuppoſe, ce qui eſt le cas de la nature, $R = \frac{\alpha}{r^2}$, $Q = \frac{\beta}{q^2}$, on trouve alors que l'équation (5) multipliée par $d.q^2$, & ajoutée à l'équation (6) multipliée par $d.r^2$ donne une ſomme intégrale, & dont l'intégrale eſt

$$\frac{d.r^2 \times d.q^2}{2dt^2} - \frac{\alpha(3r^2 + q^2 - h^2)}{r} - \frac{\beta(3q^2 + r^2 - h^2)}{q}$$

$$= 4A(r^2 + q^2) + 2c \;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

Cette équation étant multipliée par $r^2 + q^2 - h^2$, & ajoutée à l'intégrale (8) trouvée précédemment, donne dans l'hypothèſe préſente une réduite de la forme

$$\frac{q^2(d.r^2)^2 + r^2(d.q^2)^2}{2dt^2} - 2\alpha r(r^2 + 3q^2 - h^2)$$
$$- 2\beta q(q^2 + 3r^2 - h^2) = 2A(r^4 + q^4 + 6r^2q^2 - h^4)$$
$$+ 2C(r^2 + q^2 - h^2) - 2B^2 \ldots\ldots (10)$$

Et la même équation étant multipliée par $2rq$, & ensuite ajoutée à celle-ci ou retranchée, donnera cette double équation,

$$\frac{(qd.r^2 \pm rd.q^2)^2}{4dt^2} - \alpha((r \pm q)^3 - h^2(r \pm q))$$
$$- \beta((q \pm r)^3 - h^2(q \pm r)) = A((r \pm q)^4 - h^4)$$
$$+ C(r \pm q)^2 - B^2 \ldots\ldots (11).$$

De sorte qu'en faisant $r + q = s$, $r - q = u$, on aura ces deux-ci,

$$\frac{(s^2 - u^2)^2 ds^2}{16dt^2} - (\alpha + \beta)s^3 + h^2(\alpha + \beta)s = A(s^4 - h^4) + Cs^2 - B^2,$$

$$\frac{(s^2 - u^2)^2 du^2}{16dt^2} - (\alpha - \beta)u^3 + h^2(\alpha - \beta)u = A(u^4 - h^4) + Cu^2 - B^2;$$

d'où l'on tire d'abord cette équation séparée,

$$\frac{ds}{\sqrt{(As^4 + (\alpha + \beta)s^3 + Cs^2 - h^2(\alpha + \beta)s - Ah^4 - B^2)}}$$
$$= \frac{du}{\sqrt{(Au^4 + (\alpha - \beta)u^3 + Cu^2 - h^2(\alpha - \beta)u - Ah^4 - B^2)}};$$

ensuite

$$dt = \frac{s^2 ds}{4\sqrt{(As^4 + (\alpha + \beta)s^3 + Cs^2 - h^2(\alpha + \beta)s - Ah^4 - B^2)}}$$
$$- \frac{u^2 du}{4\sqrt{(Au^4 + (\alpha + \beta)u^3 + Cu^2 - h^2(\alpha - \beta)u - Ah^4 - B^2)}};$$

enfin l'équation (7) deviendra, en employant les mêmes substitutions,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4Bh^2}{(s^2-h^2)(u^2-h^2)} = \frac{4Bh^2}{s^2-u^2}\left(\frac{1}{s^2-h^2} - \frac{1}{u^2-h^2}\right);$$

& par conſéquent elle donnera

$$d\varphi = \frac{Bh^2 ds}{(s^2-h^2)\sqrt{(As^4+(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-h^2(\alpha+\beta)s-Ah^4-B^2)}}$$

$$-\frac{Bh^2 du}{(u^2-h^2)\sqrt{(Au^4+(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-h^2(\alpha-\beta)u-Ah^4-B^2)}}.$$

Si on pouvoit intégrer ces différentes différentielles, on auroit d'abord une équation entre s & u, enſuite on auroit t & φ en fonctions de s & u; donc on auroit q, & de-là t, & φ en fonctions de r; & comme ſin $\psi = \frac{r^2+h^2-q^2}{2hr}$, on auroit auſſi ψ en r. Mais ces différentielles ſe rapportent à la rectification des ſections coniques, on ne ſauroit les intégrer que par approximation, & la meilleure méthode pour cela eſt celle que j'ai donnée ailleurs pour l'intégration de toutes les différentielles qui renferment un radical carré où la variable monte à la quatrieme dimenſion ſous le ſigne.

Si outre les deux forces $\frac{\alpha}{r^2}$ & $\frac{\beta}{q^2}$ qui attirent le corps vers les deux centres fixes, il y avoit une troiſieme force proportionnelle à la diſtance qui l'attirât vers le point placé au milieu de la ligne qui joint les deux centres, il eſt viſible que cette force pourroit ſe décompoſer en deux tendantes aux mêmes points, & proportionnelles auſſi aux diſtances. Dans ce cas donc on auroit $R = \frac{\alpha}{r^2} + 2\gamma r$, $Q = \frac{\alpha}{q^2} + 2\gamma q$; & l'on trouveroit que l'intégrale (9) auroit auſſi lieu dans ce cas; ſeulement il faudroit ajouter à ſon premier membre les termes

$$\gamma\left(5r^2q^2 + \frac{3}{2}(r^4+q^4) - h^2(r^2+q^2)\right);$$

enſuite il y auroit à ajouter au premier membre de l'équation (10), les termes

$$\frac{\gamma}{2}\left(r^6+q^6+15r^2q^2(r^2+q^2) - h^2(r^4+q^4+6r^2q^2)\right),$$

& par conſéquent, au premier membre de l'équation (11), les termes

$$\frac{\gamma}{4}\left((r \pm q)^6 - h^2(r \pm q)^4\right).$$

De ſorte qu'il n'y aura qu'à augmenter les polynomes en s & u ſous le ſigne radical des termes reſpectifs

$$-\frac{\gamma}{4}(s^6 - h^2s^4) \text{ \& } -\frac{\gamma}{4}(u^6 - h^2u^4);$$

ce qui ne rend gueres la ſolution plus compliquée.

24. Quoiqu'il ſoit impoſſible d'intégrer en général l'équation trouvée entre s & u, & d'avoir par conſéquent une relation finie entre ces deux variables, on peut néanmoins en avoir deux intégrales particulieres repréſentées par $s = const$, & $u = const$. En effet, ſi on repréſente en général cette équation par $\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{du}{\sqrt{U}}$, il eſt clair qu'elle aura auſſi lieu en faiſant ds ou du nuls, pourvu que les dénominateurs $\sqrt{S}$ ou $\sqrt{U}$ ſoient auſſi nuls en même tems, & du même ordre. Pour déterminer les conditions néceſſaires dans ce cas, on fera $s = f + \omega$, f étant une conſtante, & ω une quantité infiniment petite, & déſignanr par F ce que devient S lorſqu'on change s en f, le membre $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ deviendra

$\frac{d\omega}{\sqrt{(F + \frac{dF}{df}\omega + \frac{d^2F}{2df^2}\omega^2 + \&c)}}$; il faudra donc pour qu'il y ait le même nombre de dimenſions de ω en haut & en bas, que l'on ait $F = 0$, & $\frac{dF}{df} = 0$; alors à cauſe de ω infiniment petit, la différentielle dont il s'agit ſe réduira à $\frac{d\omega}{\omega\sqrt{\frac{d^2F}{2df^2}}}$; dont l'intégrale eſt $\frac{1}{\sqrt{\frac{d^2F}{2df^2}}} \times l\frac{\omega}{k}$; k étant une conſtante arbitraire. Si donc on fait $\omega = 0$, & qu'on prenne en même-tems auſſi $k = 0$, il eſt viſible que la valeur de $l\frac{\omega}{k}$ deviendra indéterminée; & l'équation pourra toujours ſubſiſter, quelque valeur que puiſſe avoir l'autre membre $\int\frac{du}{\sqrt{U}}$. Or on ſait, & il eſt viſible par ſoi-même que $F = 0$ & $\frac{dF}{df} = 0$, ſont les conditions qui rendent f une racine double de l'équation $F = 0$. D'où il s'enſuit en général que ſi le polynome S a une ou pluſieurs racines doubles, chacune de ces racines fournira une valeur particuliere de s; il en ſera de même pour le polynome U.

Maintenant il eſt viſible que l'équation $s = f$ ou $r + q = f$ repréſente une ellipſe, dont les deux foyers ſont dans les deux centres des rayons r & q, & dont le grand axe eſt égal à f. De même l'équation $u = g$ ou $r - q = g$ repréſente une hyperbole dont les foyers ſont dans le même centre, & dont le premier axe eſt g.

Ainſi les ſolutions particulieres dont nous venons de parler, donnent des ellipſes ou des hyperboles décrites

autour des centres des forces $\frac{\alpha}{r^2}$, $\frac{\beta}{q^2}$ pris pour foyers. Et comme les polynomes S & V contiennent les trois constantes arbitraires A, B, C dépendantes de la direction & de la vîtesse initiale du corps, il est visible qu'on pourra toujours prendre ces élémens, tels que le corps décrive une ellipse ou une hyperbole donnée autour des foyers donnés. Ainsi la même section conique qui peut être décrite en vertu d'une force tendante à l'un des foyers en raison inverse des carrés des distances, ou tendante au centre en raison directe des distances, peut l'être encore en vertu de trois forces pareilles tendantes aux deux foyers & au centre ; ce qui est très-remarquable.

25. Si le centre des forces Q dont la position a été déterminée en général par les coordonnées a, b, c (art. 22), n'étoit pas fixe, mais qu'il eût un mouvement connu, alors ces quantités a, b, c ne seroient plus constantes, mais deviendroient des fonctions du tems t. Cependant il est visible que les équations (1), (2), (3) auroient lieu de même, puisque la quantité V resteroit la même, ainsi que ses différentielles relatives à r, ψ, φ; mais l'intégrale (4) n'auroit point lieu, comme nous l'avons déja remarqué en général dans l'article 4.

Il n'en seroit pas de même si on vouloit que le centre des forces R, auquel nous rapportons le mouvement du corps, fût lui-même en mouvement. Alors pour avoir les coordonnées rectangles x, y, z du mouvement absolu du corps, il faudroit prendre la somme de celles de ce centre rapporté à un point fixe dans l'espace, & de celles du corps rapporté à ce même centre.

Ainsi

Ainsi nommant X, Y, Z les coordonnées pour le centre des forces R, & représentant comme ci-dessus le mouvement du corps autour de ce centre par le rayon r, & les deux angles ψ & φ, on auroit dans le cas présent

$x = X + r \cos\psi \cos\varphi, y = Y + r \cos\psi \sin\varphi, z = Z + r \sin\psi;$

d'où l'on tire $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$

$+ 2\, dX\, d.(r \cos\psi \cos\varphi) + 2\, dY\, d.(r \cos\psi \sin\varphi)$

$+ 2\, dZ\, d.(r \sin\psi) + r^2 (\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2.$

De sorte qu'il faudra ajouter à la valeur de T de l'article 17, la quantité

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{2\,dt^2} + \frac{dX\, d.(r \cos\psi \cos\varphi)}{dt^2}$$

$$+ \frac{dY\, d.(r \cos\psi \sin\varphi)}{dt^2} + \frac{dZ\, d.(r \sin\psi)}{dt^2}$$

laquelle étant désignée par T', on aura donc à ajouter aux trois équations de l'article cité, ou plus généralement à celles de l'article 22, les termes

$$d.\frac{\delta T'}{\delta d\psi} - \frac{\delta T'}{\delta \psi},\ d.\frac{\delta T'}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T'}{\delta \varphi},\ d.\frac{\delta T}{\delta dr} - \frac{\delta T'}{\delta r}.$$

A l'égard de la valeur de V, elle demeurera la même, pourvu qu'on continue à prendre le centre des forces R pour l'origine commune des coordonnées a, b, c des autres centres.

Or en regardant le mouvement du centre comme connu, ses coordonnées X, Y, Z doivent être considérées comme des fonctions données de t. Ainsi la partie $\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{2\,dt^2}$

de l'expression de T' sera une simple fonction de t, & s'évanouira dans la différenciation par δ. Il suffira donc de prendre pour T' les autres termes ; & d'après la remarque faite dans l'article 7 de la Section quatrieme, on trouvera facilement que les termes à ajouter respectivement aux premiers membres des équations (1), (2), (3) de l'article 22 seront

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \times - r \sin \psi \cos \varphi + \frac{d^2 Y}{dt^2} \times - r \sin \psi \sin \varphi + \frac{d^2 Z}{dt^2} \times r \cos \psi,$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \times - r \cos \psi \sin \varphi + \frac{d^2 Y}{dt^2} \times r \cos \psi \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \times \cos \psi \cos \varphi + \frac{d^2 Y}{dt^2} \times \cos \psi \sin \varphi + \frac{d^2 Z}{dt^2} \times \sin \psi.$$

Si le mouvement du centre étoit uniforme & rectiligne, on auroit alors $\frac{d^2 X}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 Y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$; & les termes précédens s'évanouiroient d'eux-mêmes. Dans tous les autres cas ces termes rendront les équations du mouvement du corps plus compliquées & plus difficiles à intégrer; & comme l'expression de T renfermera toujours le tems t, à raison des quantités $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, l'intégrale $T + V = \text{const}$, n'aura jamais lieu.

26. Nous avons supposé jusqu'ici que le corps étoit entiérement libre. S'il étoit contraint de se mouvoir sur une surface courbe donnée, le rayon r seroit alors une fonction connue de φ & ψ, qui contiendroit aussi t, dans le cas où la surface elle-même seroit variable, ou seulement mobile suivant une loi donnée. Il n'y auroit donc qu'à substituer cette valeur de r dans les expressions de T & de V, & faire varier ensuite les deux variables ψ & φ; on auroit

ainſi deux équations qui ſerviroient à déterminer le mouvement du corps.

Si r eſt égale à une conſtante ou à une ſimple fonction de t ſans ψ ni φ; les variations de cette quantité relatives à la caractériſtique δ ſeront nulles, & l'on aura alors ſimplement les équations (1) & (2) de l'article 22, dans leſquelles il faudra ſubſtituer à r ſa valeur donnée.

Ce cas renferme en général la théorie des pendules de longueur conſtante ou variable. Imaginons en effet un pendule ſimple dont la longueur ſoit r, & qui ſoit ſuſpendu au centre des rayons r. Suppoſons les forces R dirigées vers ce centre, nulles; & les forces Q paralleles, en éloignant leur centre à l'infini. Prenons enfin pour une plus grande ſimplicité, l'axe des ordonnées z vertical, & dirigé de haut en bas, & les forces Q dans la même direction, on aura $a = 0$, $b = 0$, $c = h = \infty$; donc $q = \ldots$ $\sqrt{(h^2 - 2hr \sin\psi + r^2)} = h - r \sin\psi$; & les équations (1) & (2) de l'article cité deviendront

$$\frac{d \,.\, r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi \, d\varphi^2}{dt^2} - Qr \cos\psi = 0,$$

$$\frac{d \,.\, r^2 \cos\psi^2 \, d\varphi}{dt^2} = 0.$$

L'angle ψ exprimera l'inclinaiſon du pendule à l'horiſon; & l'angle φ ſera celui qu'il décrit en tournant autour de la verticale.

La ſeconde équation donne d'abord

$$\frac{r^2 \cos\psi^2 \, d\varphi}{dt} = A\,; \text{ d'où } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2 \cos\psi^2}\,;$$

& cette valeur étant ſubſtituée dans la premiere, on a

$$\frac{d.r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{A^2 \sin\psi}{r^2 \cos\psi^3} - Qr\cos\psi = 0.$$

Si r & Q ſont conſtans comme dans les pendules ordinaires, Q déſignant la force de la gravité, l'équation précédente devient intégrable étant multipliée par $d\psi$; & l'on a alors

$$\frac{r^2 d\psi^2}{2dt^2} - \frac{A^2}{2r^2 \cos\psi^2} - Qr\sin\psi = B;$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{r^2 \cos\psi\, d\psi}{\sqrt{(A^2 + 2Br^2\cos\psi^2 + 2Qr^3\cos\psi^2 \sin\psi)}},$$

& enſuite

$$d\varphi = \frac{A\,d\psi}{\cos\psi\sqrt{(A^2 + 2Br^2\cos\psi^2 + 2Qr^3\cos\psi^2\sin\psi)}}.$$

Mais ces différentielles en ψ ne ſont point intégrables à moins de ſuppoſer que les variations de ψ ne ſoient très-petites. Cependant on peut démontrer par un raiſonnement ſemblable à celui de l'article 24, que la valeur de ψ peut être conſtante, pourvu qu'elle rende la quantité ſous le ſigne nulle, ainſi que ſa différentielle; c'eſt le cas où le pendule décrit la ſurface d'un cône droit.

Si le rayon r eſt variable, comme lorſqu'on demande le mouvement d'un poids ſuſpendu par un fil qui ſe raccourcit ou s'allonge ſuivant une loi donnée, l'équation n'eſt plus intégrable en général; mais elle le ſeroit dans le cas imaginaire où la force Q ſeroit réciproquement proportionnelle au cube de la diſtance au plan horiſontal qui paſſe par le point de ſuſpenſion. Car faiſant $Q = \frac{K}{r^3 \sin\psi^3}$, & multipliant toute l'équation par $r^2 d\psi$, on auroit l'intégrale

$$\frac{(r^2 d\psi)^2}{dt^2} - \frac{A^2}{\operatorname{cos}\psi^2} + \frac{K}{\operatorname{sin}\psi^2} = B;$$

d'où l'on tireroit dt, & enſuite $d\varphi$ en fonctions différentielles de ψ.

En général ſi on repréſente par $L = 0$, la ſurface ſur laquelle le corps doit ſe mouvoir, L étant une fonction donnée de r, ψ, φ & t; il n'y aura qu'à regarder cette équation comme une équation de condition, qui doit avoir lieu entre les variables r, ψ, φ; & ajouter par conſéquent aux premiers membres des équations (1), (2), (3) de l'article 22, les termes $\lambda \frac{dL}{d\psi}$, $\lambda \frac{dL}{d\varphi}$, $\lambda \frac{dL}{dr}$; λ étant une quantité indéterminée, qu'il faudra éliminer, enſorte qu'il ne reſtera que deux équations, qui combinées avec l'équation $L = 0$, ſerviront à déterminer complettement la courbe, & le mouvement du corps.

Mais ſi la courbe même dans laquelle le corps doit ſe mouvoir étoit donnée, on auroit alors deux équations, $L = 0$ & $M = 0$; & il faudroit ajouter reſpectivement aux premiers membres des équations différentielles, (1), (2), (3), les termes $\lambda \frac{dL}{d\psi} + \mu \frac{dM}{d\psi}$, $\lambda \frac{dL}{d\varphi} + \mu \frac{dM}{d\varphi}$, $\lambda \frac{dL}{dr} + \mu \frac{dM}{dr}$, les deux quantités λ & μ étant indéterminées, & devant enſuite être éliminées.

Lorſque L & M ne contiennent point t, on aura ſur le champ l'intégrale $T + V =$ conſt, qui eſt en même tems délivrée de λ & μ; mais cette intégrale n'aura point lieu lorſque le tems t entrera dans les équations de la ſurface ou courbe donnée.

De cette maniere on trouvera très-facilement les équations pour le mouvement d'un corps dans un tube mobile selon une loi quelconque, problême dont la solution par les méthodes ordinaires est assez compliquée.

§. III.

Du mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, soit par des forces d'attraction, soit en se tenant par des fils ou par des leviers.

27. Nous nommerons m, m', m'', &c, les masses des différens corps du systême, regardés comme des points, x, y, z les coordonnées rectangles du corps m, x', y', z', celles du corps m', & ainsi de suite, ces coordonnées étant toutes rapportées aux mêmes axes fixes dans l'espace; & pour mieux fixer les idées, nous supposerons toujours les axes des x & y horisontaux, & les axes des z verticaux & dirigés de haut en bas. Nous employerons d'abord ces coordonnées dans les formules générales, mais nous les transformerons ensuite en d'autres plus appropriées à la nature des systêmes proposés.

On aura donc en général

$$T = m\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + m'\,\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2\,dt^2} + \&c.$$

Nous nommerons de plus P, Q, &c, les forces accélératrices avec lesquelles chaque point de la masse m tend vers des centres donnés fixes ou non, en prenant, si l'on veut, la force accélératrice de la gravité pour l'unité; & nous

ſuppoſerons ces forces proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances reſpectives p, q, r, &c, du corps m à ces centres. Les mêmes lettres marquées d'un trait repréſenteront des quantités analogues relativement au corps m', & ainſi de ſuite.

On aura ainſi,

$$V = m\int(P\,dp + Q\,dq + \&c) + m'\int(P'\,dp' + Q'\,dq' + \&c) + \&c.$$

Et ſi les corps ſont animés par une force verticale & conſtante π, telle que celle de la gravité, alors P, P', &c, ſeront $= \pi$, & dp, dp', &c, deviendront $-dz$, $-dz'$, &c, à cauſe que les z diminuent en montant. Conſéquemment on aura dans ce cas,

$$V = -\pi(mz + m'z' + m''z'' + \&c).$$

Quant aux attractions mutuelles, il eſt clair que ſi R exprime l'attraction abſolue ou la force accélératrice avec laquelle chaque point de la maſſe m eſt tiré par chaque point de la maſſe m', la force totale avec laquelle chaque point de m tend vers le corps ou centre m' ſera exprimée par $m'R$. Ainſi nommant r la diſtance entre ces deux corps, on aura $mm'\int R\,dr$ pour le terme dû à cette attraction dans la valeur de V; & ainſi des autres.

Enfin ſi après avoir introduit dans les fonctions T & V de nouvelles variables ξ, ψ, &c, chacune d'elles eſt indépendante de toutes les autres; on aura, relativement à ces différentes variables, des équations de la forme $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} - \frac{\delta V}{\delta \xi} = 0$; mais ſi ces variables doivent encore être aſſujetties aux équations $L = 0$, $M = 0$, &c; alors

chaque variable ξ donnera pour le mouvement du corps l'équation différentielle,

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}-\frac{\delta T}{\delta\xi}+\frac{\delta V}{\delta\xi}+\lambda\frac{\delta L}{\delta\xi}+\mu\frac{\delta M}{\delta\xi}+\&c=0,$$

les quantités λ, μ, &c, étant indéterminées, & devant être éliminées.

Et l'on se souviendra que si les fonctions T, V, L, M, &c, ne renferment point le tems t, on aura toujours l'intégrale $T+V=$ const, laquelle renferme le principe des forces vives; mais que cette intégrale cessera d'avoir lieu, si la variable finie t entre dans l'une des fonctions dont il s'agit.

28. Cela posé, considérons d'abord deux corps m & m' qui s'attirent mutuellement avec une force absolue R, & supposons qu'on ne demande que le mouvement du corps m' autour du corps m. Nommant ξ, η, ζ les coordonnées rectangles du corps m' par rapport au corps m pris pour centre, ces coordonnées étant rapportées à des axes paralleles à ceux des x, y, z, & passant par le corps m; on aura $x'=x+\xi$, $y'=y+\eta$, $z'=z+\zeta$. Donc,

1°. On aura $T=(m+m')\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2d\xi^2}$

$$+m'\frac{dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta}{2dt^2}+m'\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{2dt^2}.$$

2°. On aura $V=mm'\int R\,dr$, en faisant

$$r=\sqrt{((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2)}=\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Maintenant comme les variables x, y, z, sont indépendantes entr'elles & des autres ξ, η, ζ; chacune de ces variables

riables fournira une équation ; & ces équations seront

$$(m+m')\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,$$

$$(m+m')\frac{d^2y}{dt^2}+m'\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,$$

$$(m+m')\frac{d^2z}{dt^2}+m'\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\xi}{dt}+a\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\eta}{dt}+b\right)$$

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\zeta}{dt}+c\right).$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression générale de T, elle deviendra

$$T=\frac{mm'}{m+m'}\times\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{2dt^2}+\frac{m'^2}{m+m'}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2};$$

ainsi T & V ne contiennent plus que les variables ξ, η, ζ de l'orbite de m' autour de m.

Si donc on nomme r le rayon vecteur de cette orbite, ψ l'inclinaison de ce rayon sur le plan des ξ & η ; & φ l'angle de sa projection sur ce plan avec l'axe des ξ, on aura, comme on l'a déja vu,

$$\xi=r\cos\psi\cos\varphi,\ \eta=r\cos\psi\sin\varphi,\ \zeta=r\sin\psi;$$

& de là $d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=r^2(\cos\psi^2\,d\varphi^2+d\psi^2)+dr^2$.

Ainsi faisant $T=\dfrac{mm'}{m+m'}\times\dfrac{r^2(\cos\psi^2\,d\varphi^2+d\psi^2)+dr^2}{2dt^2}$,

(j'omets la constante, parce qu'elle disparoît dans les diffé-

renciations) & $V = m m' \int R\, dr$, les variations de ψ, φ & r donneront, après avoir divisé tous les termes par $\frac{m m'}{m + m'}$,

$$\frac{d \,.\, r^2 d \psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d \,.\, r^2 \cos\psi^2\, d\varphi}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r(\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + (m + m')R = 0;$$

équations qu'on voit être semblables à celles que nous avons déja trouvées & résolues pour le mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe (art. 17); de sorte que le mouvement sera le même dans les deux cas, en supposant la force dirigée au centre fixe, exprimée par $(m + m')R$.

29. Supposons ensuite trois corps m, m', m'' qui s'attirent mutuellement; savoir m & m' par la force accélératrice R, m & m'' par la force R', & m' & m'' par la force R''; & qu'on ne demande que le mouvement relatif de ces corps.

Conservant les dénominations de l'article précédent relatives aux corps m & m', soit de plus, pour le corps m'', ξ', η', ζ' les coordonnées rectangles rapportées au corps m comme au centre; on aura $x'' = x + \xi'$, $y'' = y + \eta'$, $z'' = z + \zeta'$.

Donc 1°. $T = (m + m' + m'') \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}$

$$+ m' \frac{dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta}{dt^2} + m' \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}$$

$$+ m'' \frac{dx\, d\xi' + dy\, d\eta' + dz\, d\zeta'}{dt^2} + m'' \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2} \quad \ldots \quad (a)$$

2°. $V = m\,m' \int R \cdot dr + m\,m'' \int R'\,dr' + m'\,m'' \int R''\,dr''$,

en faisant $r = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$; $r' = \sqrt{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$,

& $r'' = \sqrt{((\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2)}$.

Puisque les variables x, y, z sont indépendantes, tant entr'elles que des autres variables, leurs variations fourniront d'abord des équations de cette forme,

$$\left.\begin{aligned}
(m + m' + m'')\,\frac{d^2 x}{dt^2} + m'\,\frac{d^2 \xi}{dt^2} + m''\,\frac{d^2 \xi'}{dt^2} &= 0\\
(m + m' + m'')\,\frac{d^2 y}{dt^2} + m'\,\frac{d^2 \eta}{dt^2} + m''\,\frac{d^2 \eta'}{dt^2} &= 0\\
(m + m' + m'')\,\frac{d^2 z}{dt^2} + m'\,\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + m''\,\frac{d^2 \zeta'}{dt^2} &= 0
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b)$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$\frac{dx}{dt} = -\left(m'\,\frac{d\xi}{dt} + m''\,\frac{d\xi'}{dt} + a\right) : (m + m' + m'')$$

$$\frac{dy}{dt} = -\left(m'\,\frac{d\eta}{dt} + m''\,\frac{d\eta'}{dt} + b\right) : (m + m' + m'')$$

$$\frac{dz}{dt} = -\left(m'\,\frac{d\zeta}{dt} + m''\,\frac{d\zeta'}{dt} + c\right) : (m + m' + m'').$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression générale de T, la réduiront à celle-ci,

$$\begin{aligned}
T = {} & \frac{m'(m + m'')}{m + m' + m''} \times \frac{d\xi^2 + dy^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\\
& - \frac{m'\,m''}{m + m' + m''} \times \frac{d\xi\,d\xi' + d\eta\,d\eta' + d\zeta\,d\zeta'}{dt^2}\\
& + \frac{m''(m + m')}{m + m' + m''} \times \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2}\\
& + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(m + m' + m'')} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)
\end{aligned}$$

laquelle ne contient plus que les variables ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' qui entrent dans la fonction V, & qui expriment les mouvemens relatifs de m' & m'' autour de m.

Comme ces six variables sont indépendantes entr'elles, on pourroit d'abord en les faisant varier séparément, avoir six équations différentielles entre ces variables; on pourroit aussi réduire l'expression T en fonction des rayons vecteurs r, r' & des angles ψ, φ, & ψ', φ' par les substitutions de $\xi = r \operatorname{cof} \psi \operatorname{cof} \varphi$, $\eta = r \operatorname{cof} \psi \operatorname{fin} \varphi$, $\zeta = r \operatorname{fin} \psi$, $\xi' = r \operatorname{cof} \psi' \operatorname{cof} \varphi'$ &c; l'on auroit alors des équations entre ces nouvelles variables.

Mais il est facile de prévoir que ces équations ne se présenteroient pas sous la forme la plus simple, du moins pour les termes différentiels, à cause du mélange des variables dans l'expression de T. Pour séparer ces variables, je donnerai à T cette forme,

$$T = \frac{m m'}{m + m'} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\, dt^2}$$

$$+ \frac{m''(m + m')}{m + m' + m''} \times \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{2\, dt^2}$$

$$+ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(m + m' + m'')},$$

en faisant

$$\alpha = \xi' - \frac{m'}{m + m'}\xi, \beta = \eta' - \frac{m'}{m + m'}\eta, \gamma = \zeta' - \frac{m'}{m + m'}.$$

Ainsi en substituant dans r' & r'' à la place de ξ', η', ζ' leurs valeurs

$$\alpha + \frac{m'}{m + m'}\xi, \beta + \frac{m'}{m + m'}\eta, \gamma + \frac{m'}{m + m'}\zeta,$$

on aura T & V exprimées en fonctions de ξ, η, ζ, α, β, γ; & ces variables étant aussi indépendantes entr'elles, fourniront autant d'équations différentielles.

Introduisons maintenant au lieu de ξ, η, ζ le rayon r & les angles ψ & φ, selon les formules données ci-dessus, la partie $\frac{mm'}{m+m'} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}$ de la valeur de T deviendra $\frac{mm'}{m+m'} \times \frac{r^2(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2dt^2}$, & c'est la seule qui fournira des termes dans les équations dépendantes des variations de r, ψ & φ. Regardant donc aussi r' & r'' comme fonctions de ces mêmes variables, on aura d'abord ces trois équations,

$$\frac{mm'}{m+m'}\left(\frac{d.r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi d\varphi^2}{dt^2}\right) + mm''R' \frac{\delta r'}{\delta\psi} + m'm''R'' \frac{\delta r''}{\delta\psi} = 0$$

$$\frac{mm'}{m+m'} \times \frac{d.r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{dt^2} + mm''R' \frac{\delta r'}{\delta\varphi} + m'm''R'' \frac{\delta r'}{\delta\varphi} = 0$$

$$\frac{mm'}{m+m'}\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2}\right) + mm'R + mm''R' \frac{\delta r'}{\delta\psi} + mm''R'' \frac{\delta r''}{\delta r} = 0.$$

Et pour avoir les valeurs de $\delta r'$, $\delta r''$ en $\delta\psi$, $\delta\varphi$, δr, il n'y a qu'à considérer que $r'\delta r' = \xi'\delta\xi' + \eta'\delta\eta' + \zeta'\delta\zeta'$ & $r''\delta r'' = (\xi' - \xi)(\delta\xi' - \delta\xi) + (\eta' - \eta)(\delta\eta' - \delta\eta) + (\zeta' - \zeta)(\delta\zeta' - \delta\zeta)$, & qu'en faisant abstraction de la variation de α, β, γ, on a $\delta\xi' = -\frac{m'}{m+m'}\delta\xi$, $\delta\eta' = \frac{m'}{m+m'}\delta\eta$, . . . $\delta\zeta' = \frac{m'}{m+m'}\delta\zeta$; de sorte que l'on aura $r'\delta r' = \frac{m'}{m+m'}(\xi'\delta\xi + \eta'\delta\eta + \zeta'\delta\zeta)$, & $r''\delta r'' = -\frac{m}{m+m'}((\xi' - \xi)\delta\xi + (\eta' - \eta)\delta\eta + (\zeta' - \zeta)\delta\zeta) = \frac{m}{m+m'}(r\delta r - \xi'\delta\xi - \eta'\delta\eta - \zeta'\delta\zeta)$.

Or en ſubſtituant pour ξ, η, ζ leurs valeurs, & mettant auſſi des valeurs ſemblables à la place de ξ', η', ζ', c'eſt-à-dire, en repréſentant pareillement le mouvement du corps m'' autour de m par le rayon vecteur r', & par les angles ψ' & φ', on trouve

$$\xi'\delta\xi + \eta'\delta\eta + \zeta'\delta\zeta = \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \Pi\delta r,$$

en ſuppoſant pour abréger

$$\Psi = rr'(\sin\psi'\cos\psi - \cos\psi'\sin\psi\cos(\varphi'-\varphi))$$

$$\Phi = rr'\cos\psi\cos\psi'\sin(\varphi'-\varphi)$$

$$\Pi = r'(\sin\psi'\sin\psi + \cos\psi'\cos\psi\cos(\varphi'-\varphi));$$

de ſorte qu'on aura

$$\delta r' = \frac{m'}{m+m'} \times \frac{\Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \Pi\delta r}{r'}$$

$$\delta r'' = -\frac{m}{m+m'} \times \frac{\Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + (\Pi - r)\delta r}{r''}.$$

Ainſi les équations précédentes deviendront en les diviſant par $\frac{mm'}{m+m'}$,

$$\frac{d.r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{r^2\sin\psi\cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2} + m''\left(\frac{R'}{r'} - \frac{R''}{r''}\right)\Psi = 0,$$

$$\frac{d.r^2\cos\psi^2 d\varphi}{dt^2} + m''\left(\frac{R'}{r'} - \frac{R''}{r''}\right)\Phi = 0,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + (m+m')R$$

$$+ m''\left[\left(\frac{R'}{r'} - \frac{R''}{r''}\right)\Pi + \frac{rR''}{r''}\right] = 0,$$

leſquelles ont, pour les termes différentiels, la même forme

que celles du mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe.

On peut trouver de la même maniere trois équations semblables pour le mouvement du corps m'' autour de m; & même comme dans les expressions de T & de V, les quantités relatives aux corps m' & m'' sont permutables entr'elles, il suffira de changer dans les équations précédentes les quantités r, ψ, φ, R & m' en r', ψ', φ', R' & m'', & réciproquement celles-ci en celles-là; la quantité r'' demeurant la même, puisqu'elle appartient également aux deux corps dont elle exprime la distance.

S'il y avoit plus de trois corps qui s'attirassent mutuellement, on résoudroit toujours le problême de la même maniere, & l'on trouveroit des équations semblables aux précédentes, mais augmentées des termes dus aux attractions de tous les autres corps.

En faisant dans ces équations $R = \frac{1}{r^2}$, $R' = \frac{1}{r'^2}$, . . . $R'' = \frac{1}{r''^2}$, &c, on a le cas du mouvement des Planetes, en tant qu'elles s'attirent mutuellement, & sont attirées par le Soleil. Et si on prend m pour la Terre, m' pour la Lune, & m'' pour le Soleil, les trois équations trouvées ci-dessus deviendront celles du problême connu sous le nom de Problême des trois corps, & dont les Géometres se sont tant occupés dans ces derniers tems. La circonstance des orbites de la Lune & du Soleil presque circulaires, le rend susceptible d'être résolu par approximation, & l'on peut voir dans les ouvrages où l'on en traite, les artifices qu'on a imaginés pour rendre l'approximation aussi exacte qu'il est possible.

30. Imaginons maintenant que les trois corps m, m', m'', au lieu de s'attirer entr'eux, ſoient peſans & unis par un fil inextenſible; de maniere que m' & m'' ſoient attachés aux deux bouts du fil, & que m le ſoit dans un point quelconque intermédiaire; & qu'ainſi les diſtances entre m & m', & entre m & m'', demeurent néceſſairement invariables.

En faiſant $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$, $z' = z + \zeta$ & $x'' = x + \xi'$, $y'' = y + \eta'$, $z'' = z + \zeta'$, on trouvera pour T la même expreſſion (a) de l'article précédent. Et la valeur de V ſera comme dans l'article 27, en exprimant par π la force accélératrice de la gravité

$$V = -\pi(m + m' + m'')z - \pi m'\zeta - \pi m''\zeta'.$$

Comme la ſeule condition du problême conſiſte dans l'invariabilité des diſtances entre m & m', & entre m & m'', & que ces diſtances ne dépendent que des variables ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', il eſt clair que les variables x, y, z ſont indépendantes entr'elles & de toutes les autres; par conſéquent en les faiſant varier ſéparément, on aura d'adord trois équations qui ſeront les mêmes que les équations (b) de l'article précédent, ſi ce n'eſt que la troiſieme contiendra de plus les termes conſtans $-\pi(m + m' + m'')$. De-là on tirera pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, les mêmes expreſſions que dans l'endroit dont il s'agit, en mettant à la place de c la quantité $c - \pi(m + m' + m'')t$. Donc on aura auſſi pour T la même transformée (c), en ayant ſoin d'y diminuer la quantité c de $\pi(m + m' + m'')t$.

Préſentement ſi on fait $\xi = r \cos\psi \cos\varphi$, $\eta = r \cos\psi \sin\varphi$, $\zeta = r \sin\psi$, & de même $\xi' = r' \cos\psi' \cos\varphi'$, $\eta' = r' \cos\psi' \sin\varphi'$, $\zeta' =$

$\zeta' = r' \sin \psi'$, il est clair que les rayons vecteurs r & r' des orbites de m' & m'' autour de m, c'est-à-dire, leurs distances de m, devront être constans par la nature du problême; ainsi en faisant ces substitutions, il n'y aura que quatre variables, ψ, ψ', φ, φ', qui étant d'ailleurs indépendantes, fourniront aussi quatre équations.

31. Comme la recherche de ces équations n'a point de difficulté, ne demandant qu'un calcul purement méchanique; bornons-nous au cas où les trois corps se meuvent dans un même plan horisontal, lequel a l'avantage d'admettre une solution complette.

On fera donc dans ce cas z, z', z'' nuls; par conséquent aussi ζ & ζ' nuls. Ainsi on aura $V = 0$, &

$$T = \frac{m'(m+m'')}{m+m'+m''} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{2\,dt^2} - \frac{m'\,m''}{m+m'+m''} \times \frac{d\xi\,d\xi' + d\eta\,d\eta'}{dt^2}$$

$$+ \frac{m''(m+m')}{m+m'+m''} \times \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2}{2\,dt^2} + \frac{a^2+b^2}{2(m+m'+m'')}.$$

Soit $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$, & $\xi' = r' \cos \varphi'$, $\eta' = r' \sin \varphi'$, puisque ψ & ψ' sont nuls; la valeur de T deviendra, à cause de dr & dr' nuls,

$$T = \frac{m'(m+m'')}{m+m'+m''} \times \frac{r^2\,d\varphi^2}{2\,dt^2} - \frac{m'\,m''}{m+m'+m''} \times \frac{rr'\cos(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'\,d\varphi}{dt^2}$$

$$+ \frac{m''(m+m')}{m+m'+m''} \times \frac{r'^2\,d\varphi'^2}{2\,dt^2} + \frac{a^2+b^2}{2(m+m'+m'')}.$$

Et elle donnera sur le champ, à raison des variations de φ & de φ', ces deux équations différentielles, d'où dépend la solution du problême

$$m'(m+m'')r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}-m'm''rr'\left(\frac{d.\operatorname{cof}(\varphi'-\varphi)d\varphi'}{dt^2}-\frac{\operatorname{fin}(\varphi'-\varphi)d\varphi'd\varphi}{dt^2}\right)=0,$$

$$m''(m+m')r'^2\frac{d^2\varphi'}{dt^2}-m'm''rr'\left(\frac{d.\operatorname{cof}(\varphi'-\varphi)d\varphi}{dt^2}+\frac{\operatorname{fin}(\varphi'-\varphi)d\varphi'd\varphi}{dt^2}\right)=0.$$

Il eft vifible que la fomme de ces deux équations eft intégrable, & que fon intégrale eft

$$m'(m+m'')r^2\frac{d\varphi}{dt}-m'm''rr'\times\frac{\operatorname{cof}(\varphi'-\varphi)(d\varphi'+d\varphi)}{dt}$$
$$+m''(m+m')r'^2\frac{d\varphi'}{dt}=\text{conft.}$$

D'ailleurs puifque T ne renferme point t, & que $V=0$, on aura l'intégrale $T=$ conft; de forte que par ces deux intégrales le problême eft déja réduit aux premieres différences.

Mais comme les indéterminées font encore mêlées entr'elles, pour les féparer, on fera $\varphi'+\varphi=s$ & $\varphi'-\varphi=u$; favoir, $\varphi'=\frac{s+u}{2}$ & $\varphi=\frac{s-u}{2}$; les deux intégrales deviendront par ces fubftitutions,

$$m'(m+m'')r^2(ds-du)+m''(m+m')r'^2(ds+du)$$
$$-2m'm''rr'\operatorname{cof}u\,ds=A\,dt,$$
$$m'(m+m'')r^2(ds-du)^2+m''(m+m')r'^2(ds+du)^2$$
$$-2m'm''rr'\operatorname{cof}u(ds^2-du^2)=B\,dt^2,$$

A & B étant deux conftantes arbitraires.

Soit pour abréger

$$M=m''(m+m')r'^2+m'(m+m'')r^2,$$
$$N=m''(m+m')r'^2-m'(m+m'')r^2,$$

on aura

$$(M - 2\, m' m'' r r' \cos u) ds + N\, du = A\, dt,$$

$$(M - 2\, m' m'' r r' \cos u) ds^2 + (M + 2\, m' m'' r r' \cos u) du^2$$
$$+ 2\, N\, ds\, du = B\, dt^2.$$

La premiere donne $ds = \frac{A\,dt - N\,du}{M - 2\, m' m'' r r' \cos u}$; & cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde, on aura

$$(A\,dt - N\,du)^2 + (M^2 - 4\, m'^2 m''^2 r^2 r'^2 \cos u^2) du^2$$
$$+ 2N(A\,dt - N\,du) du = B(M - 2\, m' m'' r r' \cos u) dt^2,$$

ſavoir, en réduiſant

$$(M^2 - N^2 - 4 m'^2 m''^2 r^2 r'^2 \cos u^2) du^2 = (BM - A^2 - 2 m' m'' r r' \cos u) dt^2;$$

d'où l'on tire

$$dt = du \sqrt{\left(\frac{M^2 - N^2 - 4\, m'^2 m''^2 r^2 r'^2 \cos u^2}{BM - A^2 - 2\, m' m'' r r' \cos u}\right)};$$

& mettant cette valeur de dt dans l'expreſſion précédente de ds on aura auſſi ds exprimée en u & du.

Ainſi le problême eſt réſolu, ou du moins ne dépend plus que de l'intégration ou conſtruction de différentielles à une ſeule variable.

32. Si le corps m du milieu pouvoit couler le long du fil, on auroit toujours la même expreſſion de T que dans la formule (c) de l'article 29; mais dans les ſubſtitutions de $r \cos \psi \cos \varphi$, $r' \cos \psi' \cos \varphi'$, $r \cos \psi \sin \varphi$, &c, à la place de, ξ, ξ', η, &c, les rayons r & r' qui expriment les diſtances des corps m' & m'' au corps m, ne ſeroient plus tous deux conſtans, mais ſeulement leur ſomme $r + r'$ qui eſt

égale à la longueur du fil par lequel les deux corps m' & m'' sont joints. Ainsi nommant a cette longueur, on auroit $r' = a - r$, & il y auroit après les substitutions cinq variables indépendantes, r, ψ, φ, ψ', φ', dont chacune fourniroit une équation différentielle, d'après la formule générale.

33. Mais si on supposoit le corps m fixement arrêté, ensorte que le fil qui joint les deux corps m' & m'' dût passer par une espece d'anneau fixe dans l'espace; en prenant, pour plus de simplicité, ce point pour l'origine des coordonnées, on feroit dans les formules précédentes, x, y, z, nuls; & l'expression (α) de T deviendroit

$$T = m' \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2} + m'' \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2},$$

laquelle, par les substitutions précédentes, se changeroit en celle-ci.

$$T = m' \frac{r^2(\text{cos}\,\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2\,dt^2} + m'' \frac{(a-r)^2(\text{cos}\,\psi'^2 d\varphi'^2 + d\psi'^2) + dr^2}{2\,dt^2}. \quad ..(d).$$

Pour la valeur de V, on auroit, comme dans l'article 30, en supposant les corps pesans, $V = -\pi\,(m'\zeta + m''\zeta')$, ou bien

$$V = -\pi\,m' r\,\text{sin}\,\psi - \pi\,m''(a-r)\,\text{sin}\,\psi'.$$

Et l'on auroit de nouveau cinq équations pour les cinq variables, r, ψ, ψ', φ, & φ', savoir,

$$m' \frac{d^2 r - r(\text{cos}\,\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + m'' \frac{d^2 r + (a-r)(\text{cos}\,\psi'^2 d\varphi'^2 + d\psi'^2)}{dt^2}$$

$$- \pi\,m'\,\text{sin}\,\psi + \pi\,m''\,\text{sin}\,\psi' = 0,$$

$$\frac{d.(r^2 d\psi) + r^2\,\text{cos}\,\psi\,\text{sin}\,\psi\,d\varphi^2}{dt^2} - \pi\,r\,\text{cos}\,\psi = 0$$

$$\frac{d.(a-r)^2 d\psi' + (a-r)^2 \operatorname{cof}\psi' \operatorname{fin}\psi' d\varphi'^2}{dt^2} + \pi(a-r)\operatorname{cof}\psi' = 0,$$

$$\frac{d.(r^2 \operatorname{cof}\psi^2 d\varphi)}{dt^2} = 0, \frac{d.(a-r)^2 \operatorname{cof}\psi'^2 d\varphi'}{dt^2} = 0.$$

Les deux dernieres ſont intégrables, & donnent d'abord

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2 \operatorname{cof}\psi^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{(a-r)^2 \operatorname{cof}\psi'^2},$$

valeurs qui étant ſubſtituées dans la ſeconde & la troiſieme les transforment en celles-ci,

$$\frac{d.r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{A^2 \operatorname{fin}\psi}{r^2 \operatorname{cof}\psi^3} - \pi r \operatorname{cof}\psi = 0$$

$$\frac{d.(a-r)^2 d\psi'}{dt^2} + \frac{B^2 \operatorname{fin}\psi'}{(a-r)^2 \operatorname{cof}\psi'^3} + \pi(a-r)\operatorname{cof}\psi' = 0,$$

dont l'intégration n'eſt gueres poſſible en général.

Elle le deviendroit ſi on faiſoit abſtraction de la peſanteur des corps; en ſuppoſant $\pi = 0$; alors les équations étant multipliées, la premiere par $r^2 d\psi$, & la ſeconde par $(a-r)d\psi'$, on auroit les intégrales

$$\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + \frac{A^2}{\operatorname{cof}\psi^2} = C^2, \frac{(a-r)^4 d\psi'^2}{dt^2} + \frac{B^2}{\operatorname{cof}\psi'^2} = D^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\psi}{\sqrt{\left(C^2 - \frac{A^2}{\operatorname{cof}\psi^2}\right)}}, \frac{dt}{(a-r)^2} = \frac{d\psi'}{\sqrt{\left(D^2 - \frac{B^2}{\operatorname{cof}\psi'^2}\right)}};$$

on a d'ailleurs l'intégrale $T + V =$ conſt, laquelle à cauſe de $V = 0$, devient, après la ſubſtitution des valeurs précédentes de $d\varphi$, $d\varphi'$, $d\psi$, $d\psi'$,

$$m'\left(\frac{C^2}{r^2} + \frac{dr^2}{dt^2}\right) + m''\left(\frac{D^2}{(a-r)^2} + \frac{dr^2}{dt^2}\right) = E^2,$$

& par conſéquent

$$dt = \frac{dr\sqrt{(m'+m'')}}{\sqrt{\left(E^2 - \frac{m'C^2}{r^2} - \frac{m''D^2}{(a-r)^2}\right)}}.$$

Cette valeur de dt étant enſuite ſubſtituée dans les quatre intégrales précédentes, on aura des équations ſéparées, par leſquelles on pourra, au moyen des quadratures, déterminer t, ψ, ψ', φ, φ' en r.

Au reſte, ſi le même corps m du milieu, au-lieu d'être fixement arrêté, comme nous venons de le ſuppoſer, pouvoit gliſſer librement ſur une ſurface, ou ſur une ligne donnée, alors les coordonnées x, y, z ne ſeroient pas nulles, mais l'une d'entr'elles ſeroit une fonction donnée des deux autres, ou deux de ces coordonnées ſeroient données en fonctions de la troiſieme; & il n'y auroit qu'à faire ces ſubſtitutions dans les mêmes expreſſions de T & de V, en ayant enſuite égard à la variabilité de ces coordonnées.

34. Si le fil étant fixement arrêté par une de ſes extrémités, eſt chargé de deux corps peſants m & m', dont le premier ſoit le plus proche du point fixe, on fera d'abord $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$, $z' = z + \zeta$, & les expreſſions de T & de V deviendront

$$T = (m + m')\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + m'\frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta}{dt^2}$$

$$+ m'\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}, V = -\pi(m + m')z - \pi m'\zeta.$$

Enſuite nommant r la portion du fil interceptée entre le point fixe & le corps m, & r' la portion interceptée entre ce corps & le ſuivant m', on fera $x = r\cos\psi\cos\varphi$,

$y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$, $\xi = r'\cos\psi'\cos\varphi'$, $\eta = r'\cos\psi'\sin\varphi'$, $\zeta = r'\sin\psi'$, & regardant r & r' comme conſtantes, on trouvera quatre équations pour les quatre variables ψ, φ, ψ', φ'. Mais ces équations ne ſont pas intégrables en général, & il n'y a que le cas où les corps ſe meuvent ſur un plan horizontal qui ſoit ſuſceptible d'une ſolution complette. On fera dans ce cas ψ & ψ' nuls, ce qui donnera $V = 0$, &

$$T = (m + m')\frac{r^2 d\varphi^2}{2dt^2} + m'\frac{rr'\cos(\varphi' - \varphi)d\varphi' d\varphi}{dt^2} + m''\frac{r'^2 d\varphi'^2}{2dt^2}.$$

Cette expreſſion de T eſt, comme l'on voit, de la même forme que celle de l'article 31; elle fournira donc des équations ſemblables, aux coëfficiens près, & qui s'intégreront par conſéquent de la même maniere.

On trouvera par un procédé ſemblable, les équations du mouvement d'un fil chargé de tant de corps qu'on voudra; mais la difficulté conſiſtera dans leur intégration; & je ne connois qu'un ſeul cas où elle puiſſe réuſſir en général; c'eſt celui où l'on ſuppoſe que les corps s'éloignent très-peu de la verticale; car comme la poſition verticale du fil eſt celle de ſon équilibre, ce cas ſera ſuſceptible de la méthode générale donnée dans le Paragraphe premier de la Section préſente.

35. Lorſque les corps s'éloignent peu de la verticale, qui eſt l'axe des z, les coordonnées x, y, x', y', &c, ſont très-petites; c'eſt pourquoi il conviendra de conſerver ces coordonnées dans le calcul. Nommant donc r, r', r'', &c, les portions du fil interceptées entre le point fixe & le premier corps m, entre ce corps & le ſuivant m', entre celui-ci & le corps m'', & ainſi de ſuite, on aura $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$,

$r' = \sqrt{((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)}$, &c, d'où l'on tire $z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$, $z' - z = \sqrt{(r'^2 - (x'-x)^2 - (y'-y)^2)}$, &c; c'eſt-à-dire, à cauſe de la petiteſſe de x, x', &c, y, y' &c,

$$z = r - \frac{x^2 + y^2}{2r}, \quad z' - z = r' - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'}, \text{ \&c};$$

ainſi les valeurs de z, z', z'', &c, ſeront

$$z = r - \frac{x^2 + y^2}{2r}$$

$$z' = r + r' - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'}$$

$$z'' = r + r' + r'' - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'} - \frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''},$$

&c.

On les ſubſtituera donc dans les expreſſions générales de T & V de l'article 27, en faiſant r, r', r'' &c, conſtantes, & rejettant les termes où les variables x, y, x', y', &c, monteroient au-delà de la ſeconde dimenſion, on aura

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2}{2dt^2} + m''\frac{dx''^2 + dy''^2}{2dt^2} + \text{\&c},$$

$$V = -\pi(m + m' + m'' + \text{\&c})r - \pi(m' + m'' + \text{\&c})r' - \pi(m'' + \text{\&c})r'' - \text{\&c},$$

$$+ \pi(m + m' + m'' + \text{\&c})\frac{x^2 + y^2}{2r} + \pi(m' + m'' + \text{\&c})\frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'}$$

$$+ \pi(m'' + \text{\&c})\frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''} + \text{\&c}.$$

On voit que dans ces expreſſions les variables x, x', x'', &c, ſont ſéparées des variables y, y', y'', &c, & que les unes & les autres y entrent de la même maniere; d'où l'on peut d'abord

d'abord conclure que l'on aura deux ſyſtêmes d'équations différentielles, indépendans & ſemblables entr'eux, l'un entre x, x', x'', &c, & l'autre entre y, y', y'', &c; de ſorte qu'il ſuffira de conſidérer un ſeul de ces ſyſtêmes; & même on pourra s'en diſpenſer, car on aura immédiatement pour les valeurs finies de x, x', x'', &c, des expreſſions telles que celles de ξ, ψ, φ, &c, données dans l'article 10, & les valeurs de y, y', y'', &c, ſeront auſſi de la même forme, & ne différeront que par les conſtantes arbitraires.

L'expreſſion de V dans laquelle la partie variable eſt compoſée de carrés tous poſitifs, fait voir d'abord que les valeurs de x, x', x'',&c, & de y, y', y'', &c, ne ſauroient contenir des arcs de cercle, mais ſeulement des ſinus & coſinus réels, enſorte que les corps ne pourront faire que de petites oſcillations autour de la verticale, comme nous l'avons démontré en général dans l'article 14. Ainſi on eſt déja aſſuré que les valeurs des coëfficiens $\sqrt{k}$, f, g, h, &c, ſeront toutes réelles; & il ne s'agira plus que de les déterminer par les méthodes de l'article 13.

Puiſque ces valeurs ſont les mêmes pour les expreſſions de x, x', x'', &c, & de y, y', y'', &c, il ſuffira de tenir compte des premieres de ces variables, dans la formation des quantités A & B. On changera donc dans T & V les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, &c, ainſi que x, x', x'', &c, en e, f, g, &c, & rejettant tous les autres termes, on aura

$$A = m\frac{e^2}{2} + m'\frac{f^2}{2} + m''\frac{g^2}{2}, \&c$$

$$B = \pi(m+m'+m''+\&c)\frac{e^2}{2r} + \pi(m'+m''+\&c)\frac{(f-e)^2}{2r'}$$

$$+\pi(m''+\&c)\frac{(g-f)^2}{2r''}+\&c,$$

d'où, en faiſant $AK-B=\Delta$, & enſuite

$$\frac{d\Delta}{de}=0,\ \frac{d\Delta}{df}=0,\ \frac{d\Delta}{dg}=0,\ \&c,$$

on tirera ces équations, où il faudra ſe ſouvenir que e doit être $=1$,

$$mek-\pi(m+m'+m''+\&c)\frac{e}{r}+\pi(m'+m''+\&c)\frac{f-e}{r'}=0,$$

$$m'fk-\pi(m'+m''+\&c)\frac{f-e}{r'}+\pi(m''+\&c)\frac{g-f}{r''}=0,$$

$$m''gk-\pi(m''+\&c)\frac{g-f}{r''}+\pi(m'''+\&c)\frac{h-g}{r'''}=0,$$

&c.

Le nombre de ces équations ſera égal à celui des variables x, x', x'', &c, c'eſt-à-dire, à celui des poids m, m', m'', &c, attachés au fil; & par conſéquent égal au nombre des quantités e, f, g, &c; de ſorte que puiſque $e=1$, il reſtera toujours une équation pour la détermination de k. Ainſi en faiſant d'abord $e=1$, la premiere équation donnera f, la ſeconde g, &c, en polynomes de k du premier, ſecond, &c, degré; & la derniere ne contiendra plus que k, & ſera d'un degré égal à ſon quantieme.

Mais on facilitera cette détermination en commençant par la derniere équation, & remontant ſucceſſivement à celles qui précédent. Pour cela nous déſignerons par μ, μ', μ'', &c, ρ, ρ', ρ'', &c, a, a', a'', &c, les quantités m, m', m'', &c, r, r', r'', &c, e, f, g, &c, priſes à rebours; & les équations priſes auſſi dans l'ordre inverſe,

feront $\mu a k - \pi \mu \frac{a - a'}{\rho} = 0$,

$\mu' a' k - \pi (\mu + \mu') \frac{a' - a''}{\rho'} + \pi \mu \frac{a - a'}{\rho} = 0$,

$\mu'' a'' k - \pi (\mu + \mu' + \mu'') \frac{a'' - a'''}{\rho''} + \pi (\mu + \mu') \frac{a' - a''}{\rho'} = 0$,

&c.

Or, nommant n le nombre des poids, on aura $a^{n-1} = e = 1$, de plus on voit par la premiere des équations ci-deſſus, laquelle ſe trouve ici la derniere, que le terme qui précéderoit e dans la ſérie e, f, g, &c, doit être nul; par conſéquent il faudra faire $a^n = 0$; & cette condition donnera l'équation en k. En effet, ſi on tire ſucceſſivement des équations précédentes les valeurs de a', a'', a''', &c, elles feront de cette forme, $a' = (1) a$, $a' = (2) a$, $a''' = (3) a$, &c, où (1), (2), (3), &c, déſignent des polynomes en k du premier, ſecond, troiſieme, &c, degré. Ainſi la condition $a^{n-1} = 1$, donnera $(n - 1) a = 1$, d'où l'on tire $a = \frac{1}{(n-1)}$; & enſuite la condition $a^n = 0$, donnera $(n) = 0$; c'eſt l'équation en k, dont on ſait déja que les racines doivent être toutes réelles, poſitives & inégales.

Si les poids ſont tous égaux entr'eux, ainſi que leurs diſtances ſur le fil, on aura alors $\mu = \mu' = \mu''$, &c, & $\rho = \rho' = \rho''$, &c $= r$; donc faiſant $\frac{rk}{\pi} = c$, les équations deviendront

$a (c - 1) + a' = 0$,

$a' (c - 3) + 2 a'' + a = 0$,

$a''(c-5)+3a'''+2a'=0$,

&c.

d'où l'on tire $a'=(1)a$, $a''=(2)a$, &c, en faisant

$(1)=1-c$

$(2)=1-2c+\frac{c^2}{2}$

$(3)=1-3c+\frac{3c^2}{2}-\frac{c^3}{2.3}$,

&c,

& en général

$$(q)=1-qc+\frac{q(q-1)}{4}c^2-\frac{q(q-1)(q-2)}{4.9}c^3+\&c.$$

Donc l'équation en k sera

$$1-nrk+\frac{n(n-1)}{4}r^2k^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{4.9}r^3k^3+\&c,=0;$$

mais la résolution générale de cette équation n'est pas encore connue.

Au reste, comme le dernier terme de cette équation se trouve divisé par $1.2, 3\ldots n$, si on la multiplie toute par ce nombre, & qu'on la dispose dans un ordre renversé, elle devient de cette forme,

$$r^n k^n-n^2r^{n-1}k^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2}r^{n-2}k^{n-2}-\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{2.3}r^{n-3}k^{n-3}+\&c=0,$$

mais n'en est pas plus facile à résoudre.

36. Si le fil étant prolongé au-delà du poids le plus bas, passoit ensuite dans un anneau placé dans la verticale, & qu'il soutînt encore un poids M attaché à son extrémité, &

ſervant, pour ainſi dire, à le tendre; il ne s'agiroit que d'ajouter aux expreſſions de T & de V les termes dûs à l'action de ce nouveau poids. Or comme par la nature du problême ce poids ne peut que monter ou deſcendre, en reſtant toujours dans la même verticale que nous prenons pour l'axe des z, il eſt clair qu'en nommant ζ ſa diſtance au point fixe que nous avons ſuppoſé être le centre des coordonnées, il n'y aura qu'à ajouter à T le terme $M\frac{d\zeta^2}{2dt^2}$, & à V le terme $-\pi M\zeta$ (art. 27); & il ne s'agira que d'avoir ζ exprimé en fonction de x, y, x', y', &c.

Pour cet effet il n'y a qu'à regarder l'anneau & le poids M comme deux nouveaux poids attachés au fil, mais dont le premier peut couler le long du fil, en reſtant toujours à une même diſtance γ du point fixe du fil, & dans la même verticale; alors γ & ζ feront les deux derniers termes de la ſérie z, z', z'', &c, & ſeront par conſéquent exprimés par les mêmes formules, en obſervant que les termes correſpondans dans les ſéries x, x', x'', &c, y, y, y'', &c, doivent être nuls. On aura ainſi

$$\gamma = r + r' + r'' + \&c + r^n - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'}$$
$$- \frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2}{2r''} - \&c - \frac{(x^{n-1})^2+(y^{n-1})^2}{2r^n},$$
$$\zeta = r + r' + r'' + \&c + r^{n+1} - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'}$$
$$- \frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2}{2r''} - \&c - \frac{(x^{n-1})^2+(y^{n-1})^2}{2r^n};$$

(les expoſans $n-1$ & n dénotent, comme l'on voit, des quantiemes & non des puiſſances) n étant le nombre des

poids attachés au fil entre le point de suspension & l'anneau. Or $r + r' + r'' +$ &c $+ r^{n+1}$ est la longueur de tout le fil depuis le point fixe jusqu'au poids M, laquelle est donnée & par conséquent constante, & que nous désignerons par b; & $r + r' + r'' +$ &c $+ r^{n-1}$ est la longueur du fil depuis le point de suspension jusqu'au dernier des poids m, m', &c, m^{n-1}, laquelle est aussi donnée, & que nous désignerons par λ. Ainsi la premiere équation donnera la valeur de r^n portion du fil interceptée entre le poids m^{n-1} & l'anneau; & cette valeur sera, aux quantités très-petites du second degré près, égale à $\gamma - \lambda$. De sorte qu'on aura

$$\zeta = b - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$$
$$- \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2r''} - \&c - \frac{(x^{n-1})^2 + (y^{n-1})^2}{2(\gamma - \lambda)}.$$

Or puisqu'on néglige dans T & V les termes très-petits d'un ordre au-dessus du second, il est clair que la quantité $M \frac{d\zeta^2}{2dt^2}$ à ajouter à T sera nulle; de sorte que la valeur de T, & par conséquent aussi celle de A qui en est dérivée, demeurera la même que dans l'article précédent. Quant à la valeur de V, à laquelle on doit ajouter la quantité $-\pi M\zeta$, on voit qu'il n'y aura qu'à augmenter de πM les coëfficiens de $\frac{x^2 + y^2}{2r}$, $\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2r'}$, &c, dans l'expression de V du même article, & y ajouter de plus les termes $- \pi M l + \pi M \frac{(x^{n-1})^2 + (y^{n-1})^2}{2(\gamma - \lambda)}$. Ainsi la quantité B deviendra, en nommant i le dernier terme de la série, e, f, g, &c,

$$B = \pi(M + m + m' + m'' + \&c) \frac{e^2}{2r} + \pi(M + m' + m'' + \&c) \frac{(f-e)^2}{2r'}$$

$$+\pi(M+m''+\&c)\frac{(g-f)^2}{2r''}+\&c+\pi M\frac{i^2}{2(\gamma-\lambda)}.$$

Désignons, comme ci-dessus, par μ, μ', μ'', &c, ρ, ρ', ρ'', &c, a, a', a'', &c, les quantités m, m', m'', &c, r, r', r'', &c, e, f, g, &c, i prises à rebours, il est clair que les valeurs de A & B exprimées par ces quantités, seront

$$A=\mu\frac{a^2}{2}+\mu'\frac{a'^2}{2}+\mu''\frac{a''^2}{2}+\&c,$$

$$B=\pi M\frac{a^2}{2(\gamma-\lambda)}+\pi(M+\mu)\frac{(a-a')^2}{2\rho}+\pi(M+\mu+\mu')\frac{(a'-a'')^2}{2\rho'}+\&c.$$

Ainsi les équations entre a, a', &c, seront $\frac{d\Delta}{da}=0$, $\frac{d\Delta}{da'}=0$, &c, en faisant $\Delta=Ak-B$, savoir,

$$\mu ak-\pi M\frac{a}{\gamma-\lambda}-\pi(M+\mu)\frac{a-a'}{\rho}=0,$$

$$\mu'a'k+\pi(M+\mu)\frac{a-a'}{\rho}-\pi(M+\mu+\mu')\frac{a'-a''}{\rho'}=0,$$

$$\mu''a''k+\pi(M+\mu'+\mu'')\frac{a'-a''}{\rho'}-\pi(M+\mu+\mu'+\mu'')\frac{a''-a'''}{}=0,$$

&c,

dans lesquelles a^{n-1} devra être $=1$, & $a^n=0$.

On procédera pour la résolution de ces équations, comme on l'a dit pour celles de l'article précédent, & il n'y aura plus qu'à substituer les valeurs qu'on aura trouvées dans les formules générales de l'article 10. Mais comme ces équations sont encore plus compliquées que celles-là, on ne sauroit se flatter d'en avoir une résolution générale, si ce n'est dans le cas où l'on suppose le poids M qui tend le fil infiniment plus grand que tous les poids m, m', &c, dont le fil est chargé; dans ce cas les équations se simplifient, & deviennent

$$\mu a k - \pi M \left(\frac{a}{\gamma - \lambda} + \frac{a - a'}{\rho} \right) = 0,$$

$$\mu' a' k + \pi M \left(\frac{a - a'}{\rho} - \frac{a' - a''}{\rho'} \right) = 0,$$

$$\mu'' a'' k + \pi M \left(\frac{a' - a''}{\rho'} - \frac{a'' - a'''}{\rho''} \right) = 0,$$

&c.

Suppoſant de plus les diſtances ρ, ρ', ρ'', &c, entre les poids égales, ainſi que les poids μ, μ', μ'', &c, & faiſant $\frac{\mu}{\pi M} \rho k = c$, on aura

$$a \left(c - 1 - \frac{\rho}{\gamma - \lambda} \right) + a' = 0,$$

$$a' (c - 2) + a + a'' = 0,$$

$$a'' (c - 2) + a' + a''' = 0,$$

&c,

où l'on voit que les quantités a', a'', a''', &c; forment une ſérie récurrente, dont le terme général a^{ν} ſera de la forme $A\alpha^{\nu} + B\beta^{\nu}$, en nommant α & β les deux racines de l'équation $x^2 + (c - 2) x + 1 = 0$.

Soit $1 - \frac{c}{2} = \text{coſ}\, \omega$, les deux racines de l'équation ſeront $\text{coſ}\, \omega \pm \text{ſin}\, \omega \sqrt{-1}$, & changeant les conſtantes A, B en d'autres C, D, on aura $a^{\nu} = C \,\text{coſ}\, \nu\omega + D \,\text{ſin}\, \nu\omega$, ou bien encore $a^{\nu} = E \,\text{ſin}\, (\nu\omega + \varepsilon)$, E & ε étant deux conſtantes indéterminées.

Il faut d'abord que cette expreſſion ſatisfaſſe à la premiere équation qui eſt d'une forme différente des autres. Or faiſant

$\nu = 0$

$\nu = 0$ & $\nu = 1$, on a $a = E \sin \varepsilon$, $a' = E \sin (\omega + \varepsilon)$, & comme $c = 2 - 2 \cos \omega$, la premiere équation deviendra . . . $\left(1 - \frac{\rho}{\gamma - \lambda} - 2 \cos \omega\right) \sin \varepsilon + \sin (\omega + \varepsilon) = 0$, d'où l'on tire

$$\text{tang.}\ \varepsilon = \frac{\sin \omega}{\cos \omega - 1 + \frac{\rho}{\gamma - \lambda}}.$$

Il faut ensuite que l'on ait $\nu^{n-1} = 1$, & $\nu^{n} = 0$; donc $E \sin ((n-1)\omega \pm \varepsilon) = 1$, $E \sin (n\omega + \varepsilon) = 0$; d'où l'on tire

$$E = \frac{1}{\sin ((n-1)\omega + \varepsilon)}, \text{ \& } n\omega + \varepsilon = 180^{\circ} \times s,$$

s étant un nombre quelconque entier.

Cette derniere équation servira à déterminer ω, qui sera par conséquent toujours un angle réel; & faisant successivement $s = 0, 1, 2,$ &c, $n - 1$, on aura n valeurs différentes de ω qui donneront les n racines de k par les formules $k = \frac{cM}{\mu \rho}$, & $c = 2 - 2 \cos \omega = 4 \overline{\sin \frac{\omega}{2}}^{2}$. Si on faisoit s plus grand que n, on ne retrouveroit que les mêmes valeurs de c. Ainsi tout est déterminé, & on a l'avantage dans ce cas d'avoir des expressions générales, tant pour k que pour a, a', a'', &c, c'est-à-dire, pour les coëfficiens f, g, &c, $= a^{n-2}$, a^{n-3}, &c.

Cette solution se simplifie encore lorsque $\rho = \gamma - \lambda$, c'est-à-dire, lorsque la portion du fil comprise entre les derniers des poids m, m', m'', &c, & l'anneau fixe est égale à l'intervalle commun ρ des mêmes poids; ce qui a lieu lorsque tous les poids divisent en parties égales la portion du fil

compriſe entre le point fixe & l'anneau. Dans ce cas on aura tang. $\varepsilon =$ tang ω, & par conſéquent $\varepsilon = \omega$. Donc $\omega = \frac{180^\circ . s}{n+1}$, & $a' = \frac{\sin(\nu+1)\omega}{\sin n\omega}$, ou bien (à cauſe de $(n+1)\omega = 180^\circ . s$) $a' = \frac{\sin(n-\nu)\omega}{\sin \omega}$, & de là $f = \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega}$, $g = \frac{\sin 3\omega}{\sin \omega}$ &c.

Ce dernier cas eſt celui d'une corde vibrante chargée d'un nombre quelconque n de petits poids égaux & placés à diſtances égales entr'eux, & qui étant fixe dans une extrémité, eſt tendue par une force M qui agit à l'autre extrémité, ſoit que cette force vienne d'un poids attaché au fil, ou d'un reſſort, ou même de l'élaſticité du fil ſuppoſé capable d'extenſion & de contraction. Auſſi la ſolution qui réſulte des formules précédentes, s'accorde-t-elle entiérement avec celle que nous avons donnée autrefois par une analyſe différente.

37. Ce que nous venons de dire ſur l'identité des effets de la tenſion produite par un poids, ou par l'élaſticité même du fil, paroît évident de ſoi-même, du moins tant que les oſcillations ſont très-petites. Cependant comme le problême du mouvement d'un fil inextenſible eſt, par ſa nature, différent de celui des oſcillations d'un fil extenſible & élaſtique, nous allons donner auſſi la ſolution directe de ce dernier.

Il n'y a ici aucune équation de condition à ſatisfaire, mais il faut tenir compte de la force élaſtique du fil, dont l'effet eſt de raccourcir chaque portion r, r', r'', &c. Soient donc R, R', R'', &c, les élaſticités reſpectives des parties du fil r, r', r'', &c, qui joignent les différens corps, élaſticités qui tendent à diminuer les lignes r, r', r'', &c, & qu'on peut ſuppoſer exprimées par des fonctions de ces mêmes lignes; il en ré-

ſultera dans la valeur de V les nouveaux termes $\int E\,dr + \int E'\,dr' + \int E''\,dr'' +$ &c; & il ne s'agira que d'y ſubſtituer pour r, r', r'', &c, leurs valeurs en x, y, z, x', y', &c; & de traiter enſuite toutes ces coordonnées comme des variables indépendantes.

Ainſi dans le cas où le fil eſt fixe dans l'origine des coordonnées, & qu'il eſt chargé des poids πm, $\pi m'$, $\pi m''$, &c, on aura en général

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + m'\,\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2\,dt^2} + \text{\&c},$$

$$V = -\pi m z - \pi m' z' - \text{\&c} + \int R\,dr + \int R'\,dr' + \text{\&c},$$

d'où $\delta V = -\pi(m\,\delta z + m'\,\delta z' + \text{\&c}) + R\,\delta r + R'\,\delta r' + \text{\&c}$,

& il n'y aura qu'à mettre pour δr, $\delta r'$, leurs valeurs tirées des formules $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, $r' = \sqrt{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)}$, &c; enſuite chacune des variables x, y, &c; donnera une équation différentielle de la forme générale $d.\frac{\delta T}{\delta dx} - \frac{\delta T}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta x} = 0$.

Dans le cas où les corps s'éloignent très-peu de la verticale qui eſt ici l'axe des coordonnées z, les valeurs des autres coordonnées x, y, x', y', &c, ſont très-petites, & celles des quantités r, r', &c, z, z', &c, different très-peu de ce qu'elles ſont dans l'état d'équilibre où x, y, x', y', &c, ſont nulles.

Suppoſons qu'alors on ait $r = p$, $r' = p'$, $r'' = p''$, &c; $z = q$, $z' = q'$, $z'' = q''$, &c, & ſoit en général $r = p + \rho$, $r' = p' + \rho'$, &c; $z = q + \zeta$, $z' = q' + \zeta'$, &c. On aura donc d'abord $p = q$, $p' = q' - q$, $p'' = q'' - q'$, &c; enſuite

$p + \rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + (q + \zeta)^2)}$, $p' + \rho' = \sqrt{((x' -)x^2 + (y' - y)^2 + (q' - q + \zeta' - \zeta)^2)}$, &c, d'où l'on tire en négligeant les dimensions des quantités très-petites x, y, ζ, x', y', &c, au-dessus du second degré,

$$\rho = \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2p}, \quad \rho' = \zeta' - \zeta + \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2p'},$$

$$\rho'' = \zeta'' - \zeta' + \frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2p''}, \text{ \&c.}$$

Soient maintenant P, P', &c, les valeurs de R, R', &c, lorsque r, r', &c, sont p, p', &c, c'est-à-dire, les élasticités des fils lorsque leurs longueurs sont réduites à p, p', &c; on aura par les formules connues, en mettant $p + \rho$ au lieu de r, $\int R\,dr = \int P\,dp + P\rho + \frac{dP}{2\,dp}\rho^2 +$ &c, & ainsi des autres fonctions $\int R'\,dr'$, &c. Donc faisant ces substitutions, & rejettant les termes où les quantités très-petites, monteroient au-dessus du second degré, on aura

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2 + d\zeta'^2}{2\,dt^2} + m''\frac{dx''^2 + dy''^2 + d\zeta''^2}{2\,dt^2} + \text{ \&c},$$

$$V = \int P\,dp - \pi m q + \int P'\,dp' - \pi m' q' + \int P''\,dp'' - \pi m'' q'' + \text{ \&c},$$

$$+ (P - \pi m)\zeta + P'(\zeta' - \zeta) - \pi m' \zeta' + P''(\zeta'' - \zeta') - \pi m'' \zeta'' + \text{ \&c},$$

$$+ P\frac{x^2 + y^2}{2p} + \frac{dP}{2\,dp}\zeta^2 + P'\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2p'} + \frac{dP'}{2\,dp'}(\zeta' - \zeta)^2$$

$$+ P''\frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{2p''} + \frac{dP''}{2\,dp''}(\zeta'' - \zeta')^2 + \text{ \&c.}$$

Or pour que l'équilibre ait lieu dans la situation où les quantités très-petites x, y, ζ, x', y', &c, sont nulles, il faut, comme nous l'avons vu dans l'article 9, que les premieres dimensions de ces quantités disparoissent dans l'ex-

preſſion de V; ainſi égalant à zéro les coëfficiens de ζ, ζ', ζ'', &c, on aura ces équations

$$P - \pi m - P' = 0,\ P' - \pi m' - P'' = 0,\ P'' - \pi m'' - P''' = 0,\ \&c,$$

leſquelles donnent

$$P' = P - \pi m,\ P'' = P - \pi(m + m'),\ P''' = P - \pi(m + m' + m''),\ \&c.$$

En comparant maintenant ces expreſſions de T & de V avec celles qui conviennent au problême de l'article 36, on voit qu'elles ſont de la même forme, du moins pour la partie qui contient les variables x, y, x', y', &c, & qu'elles deviennent même identiques de part & d'autre en faiſant $P = \pi(M + m + m' + m'' + \&c)$; de ſorte que les valeurs de ces variables ſeront néceſſairement les mêmes dans les deux problêmes. Quant aux autres variables ζ, ζ', &c, elles auront auſſi des valeurs ſemblables, en changeant ſeulement les quantités $\frac{P}{p}$, $\frac{P'}{p'}$, &c, en $\frac{dP'}{dp}$, $\frac{dP'}{dp'}$, &c, comme on le voit d'abord par les expreſſions précédentes de T & V. Ainſi nous ne nous arrêterons pas davantage ſur ce problême.

38. Les cas que nous venons d'examiner, ſont tous ſuſceptibles de ſolutions complettes, parce que la ſuppoſition des mouvemens très-petits rend les équations différentielles, ſimplement linéaires, & par conſéquent intégrables, comme nous l'avons vu dans le paragraphe ſecond. Il peut cependant y avoir des circonſtances qui détruiſent les avantages de cette ſuppoſition. Par exemple, ſi le fil étoit fixe par ſes deux extrémités, & qu'il fût en même-tems inextenſible, incapable de contraction, ou plutôt ſi les corps étoient unis par des verges droites jointes enſemble par des charnieres, & dont

la premiere & la derniere fuſſent aſſujetties à tourner autour de deux points fixes; alors en ſuppoſant toujours que les corps s'éloignent très-peu de la verticale, on auroit d'abord pour T & V les mêmes valeurs que dans l'article 35, mais avec cette différence que les variables x, y, x', &c, au lieu d'être entr'elles tout-à-fait indépendantes, devroient ſatisfaire à l'équation réſultante de la condition que l'extrémité inférieure du fil ſoit auſſi fixe. Or nommant γ la diſtance verticale entre ce point fixe & le point fixe ſupérieur, on aura, comme dans l'article 36,

$$\gamma = r + r' + r'' + \&c + r^n - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'} - \frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''} - \&c - \frac{(x^{n-1})^2 + (y^{n-1})^2}{2r^n},$$

où toutes les quantités r, r', r'', &c, r^n ſont données, puiſque ce ſont les longueurs des différens fils ou verges, qui uniſſent les corps, de maniere que leur ſomme $r + r' + r'' +$ &c $+ r^n$ exprime la longueur totale du fil entre les deux points fixes, & par conſéquent $r + r' + r'' + \&c + r^n - \gamma$ eſt l'excès de la longueur du fil ſur la partie de l'axe à laquelle il répond. Nommant donc c^2 cet excès qui eſt connu, on aura l'équation

$$c^2 = \frac{x^2 + y^2}{2r} + \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'} + \frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''} + \&c + \frac{(x^{n-1})^2 + (y^{n-1})^2}{2r^n},$$

dans laquelle on voit que les variables forment par-tout deux dimenſions, enſorte qu'il eſt impoſſible d'en déterminer une quelconque, ſans employer les radicaux.

On a donc ici le cas dont on a parlé en général dans l'article

16, & qui échappe à la méthode générale pour la détermination des mouvemens très-petits; ce qui eſt d'autant plus ſingulier qu'en ſuppoſant les fils ou les verges tant ſoit peu extenſibles & contractibles, le problême redevient ſuſceptible d'une ſolution complette, comme nous l'avons vu ci-deſſus. C'eſt une remarque curieuſe, & qui n'avoit pas encore été faite.

Pour rendre encore plus ſenſible cette vérité, nous allons réſoudre le cas précédent dans la ſuppoſition qu'il n'y ait que deux poids m, m' attachés au fil, & que les mouvemens ſe faſſent dans un même plan. On n'aura ainſi qu'à déterminer deux variables x & x', toutes les autres étant nulles par l'hypothèſe.

L'équation de condition ſera donc dans ce cas

$$c^2 = \frac{x^2}{2r} + \frac{(x'-x)^2}{2r'} + \frac{x'^2}{2r''},$$

& les valeurs de T & V ſeront comme dans l'article 35,

$$T = m\frac{dx^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2}{2dt^2},$$

$$V = -\pi(m+m')r - \pi m'r' + \pi(m+m')\frac{x^2}{2r} + \pi m'\frac{(x'-x)^2}{2r'}.$$

On peut, pour plus de facilité, employer l'intégrale générale $T + V = const$, laquelle a lieu auſſi dans ce cas, puiſque l'équation de condition ne renferme point t (art. 4). On aura donc

$$m\frac{dx^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2}{2dt^2} + \pi(m+m')\frac{x^2}{2r} + \pi m'\frac{(x'-x)^2}{2r'} = b^2,$$

b étant une conſtante arbitraire; & cette équation combinée

avec l'équation de condition ci-deſſus, ſervira à déterminer x & x'.

Suppoſons, pour ſimplifier davantage, les deux poids m, m' égaux, ainſi que les longueurs r, r', r'' des trois verges, & $\pi = 1$; & faiſons $x = \xi \sin \varphi$, $x' = \xi \cos \varphi$, l'équation de condition donnera

$$\frac{rc^2}{\xi^2} = 1 - \sin\varphi \cos\varphi = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{2},$$

& l'équation différentielle deviendra

$$r\xi^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2 \sin\varphi^2 + (\sin\varphi - \cos\varphi)^2 = \frac{2rb^2}{m},$$

d'où l'on tire en ſubſtituant pour ξ^2 ſa valeur tirée de l'équation précédente

$$dt = \frac{d\varphi \sqrt{r}}{\sqrt{\left(\left(\frac{b^2}{mc^2} - 1\right)(2 - \sin 2\varphi) + \cos 2\varphi\right)}},$$

différentielle dont l'intégration dépend de la rectification des ſections coniques. De ſorte que, même dans le cas le plus ſimple, le problême eſt d'un ordre ſupérieur aux fonctions logarithmiques & circulaires.

39. En conſervant la ſuppoſition des corps unis par des verges droites & inflexibles, imaginons maintenant que les charnieres par leſquelles ces verges ſont jointes, ſoient élaſtiques, c'eſt-à dire, douées de forces qui tendent à remettre tous ces côtés du polygone en ligne droite les uns avec les autres; il ne s'agira que d'introduire dans l'expreſſion de V les termes dûs à ces différentes forces, dont l'effet conſiſte à diminuer les angles de contingence du polygone.

Soient

Soient E, E', E'', &c, les forces élaſtiques qui agiſſent dans les angles ou jointures des verges r & r', r' & r'', r'' & r''', &c, dans leſquels ſont placés les corps m, m', m'', &c; & ſoient e, e', e'', &c, les complémens de ces angles à 180°, c'eſt-à-dire, les angles de contingence du polygone, dont r, r', r'', &c, ſont les côtés ſucceſſifs; les termes à ajouter à V ſeront $\int E\,de + \int E'\,de' + \int E''\,de''$ + &c, en regardant, ce qui eſt toujours permis, E, E', E'', &c, comme des fonctions données de e, e', e'', &c. On déterminera ces angles en fonctions des coordonnées, comme nous l'avons fait dans le paragraphe ſecond de la Section cinquieme de la premiere Partie; en effet, il eſt clair que ſi on imagine une droite p qui joigne les extrémités des deux côtés contigus r & r', on aura dans le triangle, dont r, r', p ſont les trois côtés, & dont $180° - e$ eſt l'angle oppoſé au côté p, on aura, dis-je, $\cos e = -\frac{r^2 + r'^2 - p^2}{2rr'}$; & de même on aura $\cos e' = -\frac{r'^2 + r''^2 - p'^2}{2r'r''}$, en prenant p' pour le troiſieme côté du triangle, dont r' & r'' ſont les deux premiers, & ainſi de ſuite. De plus il eſt aiſé de voir qu'on aura $p = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$, $p' = \sqrt{((x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2)}$, $p'' = \sqrt{((x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2)}$, &c. Donc puiſque $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, $r' = \sqrt{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)}$, $r'' = \sqrt{((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2)}$, &c, on aura

$$\cos e = \frac{x(x' - x) + y(y' - y) + z(z' - z)}{rr'},$$

$$\cos e' = \frac{(x' - x)(x'' - x') + (y' - y)(y'' - y') + (z' - z)(z'' - z')}{r'r''},$$

$$\text{cof}\, e'' = \frac{(x''-x')(x'''-x'')+(y''-y')(y'''-y'')+(z''-z')(z'''-z'')}{r''r'''},$$

&c.

On ſuppoſe communément que la force élaſtique dans les lames à reſſorts eſt proportionnelle à l'angle même de contingence, mais on peut la ſuppoſer également proportionnelle au ſinus de cet angle, parce que dans l'infiniment petit, le ſinus ſe confond avec l'angle même; il paroît même que cette ſuppoſition eſt plus conforme à la maniere dont on peut concevoir que la force élaſtique eſt produite dans la courbure des reſſorts. Quoi qu'il en ſoit, ſi on fait

$$E = H \,\text{ſin}\, e,\ E' = H \,\text{ſin}\, e',\ E'' = H \,\text{ſin}\, e'', \text{\&c},$$

H étant un coëfficient conſtant, on aura

$$\int E\, de = H(1 - \text{cof}\, e), \int E'\, de' = H(1 - \text{cof}\, e'), \text{\&c};$$

& il n'y aura qu'à ſubſtituer pour e, cof e, cof e', &c, les valeurs précédentes, & procéder enſuite comme à l'ordinaire.

Lorſque les coordonnées x, x', x'', &c, y, y', y'', &c, ſont très-petites, comme nous l'avons ſuppoſé dans l'article 35 & ſuiv. alors on a, ainſi qu'on l'a vu dans cet article,

$$z = r - \frac{x^2 + y^2}{2r},\ z' - z = r' - \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}{2r'},$$

$$z'' - z' = r'' - \frac{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}{2r''}, \text{ \& ainſi de ſuite;}$$

donc ſubſtituant ces valeurs dans les expreſſions de cof e, cof e', cof e'', &c, & négligeant les termes où x, x', x'', &c, y, y', y'', &c, formeroient enſemble des dimenſions plus

hautes que la ſeconde, on aura

$$\text{coſ}\,e = 1 - \frac{x^2+y^2}{2r^2} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'^2} + \frac{x(x'-x)+y(y'-y)}{rr'}$$

$$\text{coſ}\,e' = 1 - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'^2} - \frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2}{2r''^2} + \frac{(x'-x)(x''-x')+(y'-y)(y''-y')}{r'r''},$$

&c.

Ainſi les termes dûs à l'élaſticité dans l'expreſſion de V, ſeront

$$\frac{K}{2}\left(\left(\frac{x}{r}+\frac{x'-x}{r'}\right)^2+\left(\frac{y}{r}+\frac{y'-y}{r'}\right)^2\right)+$$

$$\frac{K}{2}\left(\left(\frac{x'-x}{r'}+\frac{x''-x'}{r''}\right)^2+\left(\frac{y'-y}{r'}+\frac{y''-y'}{r''}\right)^2\right)+$$

$$\frac{K}{2}\left(\left(\frac{x''-x'}{r''}+\frac{x'''-x''}{r'''}\right)^2+\left(\frac{y''-y'}{r''}+\frac{y'''-y''}{r'''}\right)^2\right)+\&c.$$

Ajoutant donc ces termes à la valeur de V de l'article 35, & achevant enſuite le calcul de la même maniere, on aura le mouvement d'un fil élaſtique fixe par une de ſes extrémités, & chargé d'un nombre quelconque de poids.

Tous les problêmes qu'on pourroit encore propoſer ſur le mouvement de pluſieurs corps qui ſe tiennent par des fils ou par des verges, ſe réſoudront toujours facilement par l'application de nos formules générales, & nous ne croyons pas devoir nous étendre davantage ſur cette matiere, qui n'eſt au fond que de pure curioſité.

40. Au reſte, la ſolution de ces ſortes de problêmes ſe ſimplifie beaucoup, lorſqu'on regarde le fil ou la verge qui joint les différens corps, comme inflexible & d'une figure donnée. Alors il n'y a de variables que celles qui dépendent

du mouvement du fil dans l'eſpace, & du mouvement des corps le long du fil; & l'on aura les formules les plus ſimples, en exprimant par ces variables mêmes les valeurs des coordonnées, & introduiſant ces valeurs dans les expreſſions générales de T & de V, car chaque variable ξ donnera toujours une équation de la forme $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} = 0$, comme nous l'avons démontré.

Suppoſons, pour donner un exemple des plus ſimples, qu'une verge droite mobile autour d'un point fixe, ſoit chargée de tant de poids m, m', m'', &c, qu'on voudra, & qui ſoient ou fixement attachés, ou libres de couler le long de la verge. Prenant le point fixe pour l'origine des coordonnées, on nommera r, r', r'', &c, les diſtances variables ou conſtantes des corps m, m', m'', &c, à ce point, & ψ, φ, les angles de la verge avec le plan horiſontal des x & y, & de ſa projection ſur ce plan avec l'axe des x; il eſt clair que les coordonnées x, y, z, ſeront exprimées comme dans l'article 17, par r coſ ψ coſ φ, r coſ ψ ſin φ, r ſin ψ, & que les autres coordonnées x', y', z', x'', y'', &c, ſeront exprimées de la même maniere, en changeant ſeulement r en r', r'', &c, puiſque les angles ψ & φ ſont les mêmes pour tous les rayons r, r', &c; par conſéquent on aura $dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2(\text{coſ}\,\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2$, $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = r'^2(\text{coſ}\,\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2) + dr'^2$ &c, en ſuppoſant tous les corps m, m', &c, mobiles à la fois. Ainſi en ayant égard à leur peſanteur ou force conſtante & verticale π, on aura (art. 27)

$$T = (m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + \&c) \times \frac{\text{coſ}\,\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2}{2\,dt^2}$$

$$+ m \frac{dr^2}{2dt^2} + m' \frac{dr'^2}{2dt^2} + m'' \frac{dr''^2}{2dt^2} + \&c,$$

$$V = - \pi (mr + m'r' + m''r'' + \&c) \sin \psi;$$

& comme les variables r, r', r'', &c, φ, ψ ſont indépendantes, chacune d'elles donnera une équation differentielle.

En faiſant d'abord varier φ, on aura l'équation differentielle

$$\frac{d.(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c) \cos \psi^2 \, d\varphi}{dt^2} = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c) \cos \psi^2 \, d\varphi}{dt} = A.$$

En faiſant enſuite varier ψ, on aura cette autre équation différentielle,

$$\frac{d.(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c) \, d\psi}{dt^2} -$$

$$\frac{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c) \sin \psi \cos \psi \, d\varphi^2}{dt^2} -$$

$$\pi (mr + m'r' + m''r'' + \&c) \cos \psi = 0,$$

laquelle en ſubſtituant pour $\frac{d\varphi}{dt}$ ſa valeur tirée de l'intégrale précédente, devient

$$\frac{d.(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c) \, d\psi}{dt^2} -$$

$$\frac{A^2 \sin \psi}{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c) \cos \psi^3} -$$

$$\pi (mr + m'r' + m''r'' + \&c) \cos \psi = 0.$$

Celle-ci feroit intégrable, étant multipliée par $(m\,r^2 + m'\,r'^2 + m''\,r''^2 + \&c)\,d\psi$, si la quantité $\pi\,(m\,r^2 + m'\,r'^2 + m''\,r''^2 + \&c)\,(m\,r + m'\,r' + m''\,r'' + \&c)$ étoit constante ou nulle, ou une fonction de ψ.

Le premier cas a lieu en général quand toutes les quantités r, r', r'', &c, sont constantes, c'est-à-dire, lorsque les corps sont fixement attachés à la verge. Dans ce cas il est visible que les deux équations en φ & ψ, & par conséquent aussi les oscillations de la verge seront les mêmes que s'il n'y avoit qu'un seul corps M placé à une distance R du point fixe, ensorte que l'on eût

$$M\,R^2 = m\,r^2 + m'\,r'^2 + m''\,r''^2 + \&c,$$

$$M\,R = m\,r + m'\,r' + m''\,r'' + \&c.$$

La valeur de R sera donc la distance du centre d'oscillation, & celle de M sera la masse à placer dans ce centre, pour que la même impulsion produise le même mouvement dans le pendule simple que dans le composé.

Le cas où $\pi\,(m\,r^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c)(m\,r + m'r' + m''r'' + \&c)$, seroit une fonction de ψ, est purement imaginaire, & nous nous dispenserons de l'examiner. Nous nous contenterons donc de discuter l'autre cas, où cette quantité est nulle, ou du moins disparoît par la supposition de $\pi = 0$, ce qui arrive lorsqu'on fait abstraction de la pesanteur des corps, & que par conséquent la valeur de V est nulle.

Rejettant donc dans la derniere équation en ψ les termes $\pi\,(m\,r + m'\,r' + m''\,r'' + \&c)\cos\psi$, & multipliant toute l'équation par $(m r^2 + m'\,r'^2 + m''\,r''^2 + \&c)\,d\psi$, elle devient intégrable, & l'intégrale est

$$\frac{(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c)^2 d\psi^2}{dt^2} - \frac{A^2}{\cos\psi^2} = B.$$

Soit

$$dt = (mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c)\, d\theta,$$

on aura $\frac{d\psi^2}{d\theta^2} - \frac{A}{\cos\psi^2} = B$, d'où l'on tire . . . .

$$d\theta = \frac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{(A^2 + B\cos\psi^2)}} = \frac{d.\sin\psi}{\sqrt{(A^2 + B - B\sin\psi^2)}},$$

& intégrant, on aura

$$\sqrt{\frac{B}{A^2+B}} \times \sin\psi = \sin(\theta\sqrt{B} + \alpha),$$

α étant une conſtante arbitraire, ainſi que A & B.

On aura enſuite $d\varphi = \frac{A\,d\theta}{\cos\psi^2}$; de ſorte que comme on a déja ſin ψ en fonction de θ, on aura auſſi, en ſubſtituant & intégrant, φ en fonction de θ.

Il reſte encore à déterminer les valeurs des diſtances r, r', r'', &c. Pour embraſſer toute la généralité poſſible, nous ſuppoſerons que parmi les corps dont la verge eſt chargée, il y en ait un ou pluſieurs de fixes, enſorte que leurs diſtances au centre demeurent conſtantes; & nous déſignerons par MR^2 la ſomme des produits des maſſes de ces corps par les carrés de leurs diſtances. Ainſi regardant les maſſes m, m', m'', &c, comme mobiles, il n'y aura qu'à ajouter à la ſomme des termes $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c$, la conſtante MR^2.

De cette maniere donc la valeur de T deviendra, en faiſant pour abréger $\frac{\cos\psi^2\, d\varphi^2 + d\psi^2}{dt^2} = u^2$,

$$T = (MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c)u^2$$
$$+ m\frac{dr^2}{2dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2dt^2} + m''\frac{dr''^2}{2dt^2} + \&c,$$

& la variabilité de r, r', r'', &c, donnera (à cause de $V = 0$) ces équations

$$\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2 = 0, \frac{d^2r'}{dt^2} - r'u^2 = 0, \frac{d^2r''}{dt^2} - r''u^2 = 0, \&c,$$

lesquelles donnent d'abord en chassant u^2

$$\frac{rd^2r' - r'd^2r}{dt^2} = 0, \frac{rd^2r'' - r''d^2r}{dt^2} = 0, \&c;$$

& intégrant $\frac{rdr' - r'dr}{dt} = a$, $\frac{rdr'' - r''dr}{dt} = b$, &c,

a, b, &c, étant des constantes arbitraires.

Soit $r' = pr$, $r'' = p'r$, &c, on aura donc $r^2dp = adt$, $r^2dp' = bdt$, &c; donc $dp' = \frac{bdp}{a}$, $p' = \frac{bp}{a} + \beta$, & de même $p'' = \frac{cp}{a} + \gamma$, &c, β, γ, &c, étant d'autres constantes arbitraires.

Maintenant je prends l'intégrale générale $T + V = const$, laquelle à cause de $V = 0$, se réduit ici à la forme

$$(MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c)u^2$$
$$+ m\frac{dr^2}{2dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2dt^2} + m''\frac{dr''^2}{2dt^2} + \&c = C^2;$$

& substituant par r^2u^2, r'^2u^2, r''^2u^2, &c, les valeurs . . . $\frac{rd^2r}{dt^2}$, $\frac{r'd^2r'}{dt^2}$, $\frac{r''d^2r''}{dt^2}$, &c, tirées des équations . . $\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2 = 0$, $\frac{d^2r'}{dt^2} - r'u^2 = 0$ &c, je la réduis à la forme

$$\frac{d^2 . (MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c)}{4\,dt^2} = C^2,$$

laquelle donne, par une double intégration,

$$MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c = 2\,C^2t^2 + Dt + E,$$

D & E étant deux nouvelles conſtantes.

Soit pour abréger

$$MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c = z,$$

on aura $z = 2\,C^2t^2 + Dt + E$, d'où l'on tire t en fonction de z; nous dénoterons cette fonction par Z, enſorte que $t = Z$, & différentiant $dt = dZ$; mais nous avions ſuppoſé $dt = z\,d\theta$, (en ajoutant MR^2 aux termes $mr^2 + m'r'^2 + \&c$, comme nous l'avons preſcrit ci-deſſus) donc $z\,d\theta = dZ$, $d\theta = \frac{dZ}{z}$, & intégrant $\theta = \int \frac{dZ}{z}$. Ayant ainſi θ en fonction de z, on aura réciproquement z en fonction de θ, & nous déſignerons par Θ cette fonction, enſorte que $z = \Theta$. Par conſéquent on aura d'abord $dt = \Theta\,d\theta$, & intégrant $t = \int \Theta\,d\theta$; de ſorte que l'on aura auſſi par-là t en fonction de θ.

Or ſi dans la valeur de z on ſubſtitue pour r'^2, r''^2, &c, leurs valeurs pr^2, $p'r^2$, &c, & enſuite $\frac{bp}{a} + \beta$, &c, à la place de p', &c, il eſt clair qu'on aura $z = MR^2 + r^2P$, P étant une fonction de p, rationelle, entiere & du ſecond degré. Donc $r^2 = \frac{Z - MR^2}{P}$ & ſubſtituant cette valeur ainſi que celle de dt dans l'équation différentielle $r^2\,dp = a\,dt$, trouvée plus haut, on aura $\frac{z - MR^2}{P}\,dp = a\,\Theta\,d\theta$ ſavoir,

$\frac{dp}{p} = \frac{a\Theta d\theta}{z - MR^2} = \frac{a\Theta d\theta}{\Theta - MR^2}$, équation ſéparée, dont l'intégration donnera p en fonction de θ. Et cette valeur de p étant enſuite ſubſtituée dans la précédente de r^2, ſavoir, $r^2 = \frac{z - MR^2}{p} = \frac{\Theta - MR^2}{p}$, on aura auſſi r en fonction de θ; & de-là à cauſe de $r' = pr$, $r'' = p'r = \ldots \left(\frac{bp}{a} + \beta\right) r$, &c, on aura encore r', r'', &c, en fonctions de θ.

Ainſi toutes les variables φ, ψ, t, r, r', r'', &c, ſeront connues en fonctions de θ, & chaſſant θ, au moyen de la valeur de t en θ, on aura φ, ψ, r, r', r'', &c, en fonctions de t; ce qui donnera la poſition de la verge, & celle de chacun des corps mobiles, à chaque inſtant.

Puiſque le terme conſtant MR^2 exprime la ſomme des maſſes des corps attachés à la verge, multipliées par les carrés de leurs diſtances au centre de rotation, il eſt clair que ſi on veut avoir égard à la maſſe même de la verge, il n'y a qu'à ſuppoſer le nombre de ces corps infini, & alors MR^2 ſera la ſomme des produits de chaque particule de la verge par le carré de ſa diſtance au centre de rotation. Ainſi le problême n'eſt pas plus compliqué dans ce cas que quand on fait abſtraction de la maſſe de la verge.

41. En général quand on veut avoir égard à la maſſe & à la figure des corps mobiles, il n'y a qu'à conſidérer chaque corps comme l'aſſemblage d'une infinité de particules qui conſervent entr'elles la même ſituation ſi le corps eſt ſolide, ou qui peuvent la varier, ſuivant certaines loix, lorſque le corps eſt flexible ou fluide; & nous avons montré à la fin de la Section précédente (art. 12 & ſuiv.) comment

on peut réduire cette considération en calcul, par des différentiations & intégrations relatives à la figure du corps. Nous traiterons dans des Sections particulieres du mouvement des corps solides & fluides, parce que cette matiere donne lieu à des recherches importantes & curieuses; & nous nous contenterons, en finissant celle-ci, de donner un exemple de la méthode dont il s'agit sur le mouvement des cordes vibrantes.

Supposons le cas de l'article 37, dans lequel le fil est pesant & extensible, & désignons par Dm la masse d'un élément quelconque du fil dont la longueur soit Ds; en prenant la caractéristique S pour représenter les intégrations relatives aux différences marquées par la caractéristique D, & retenant d'ailleurs les autres dénominations du même article, il est visible que les valeurs de T & de V se réduiront à la forme

$$T = S\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\,Dm,\; V = S\left(-\pi z\,Dm + \int R\,d\,Ds\right),$$

R étant l'élasticité ou la force de contraction de l'élément Ds, laquelle peut toujours être supposée une fonction de ce même élément.

Ainsi comme il n'y a ici aucune équation de condition à satisfaire, on aura, selon la formule de l'article 15 de la Section citée, cette équation générale pour le mouvement du fil ou de la corde,

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) Dm$$
$$-\pi\,S\,\delta z\,Dm + S\,R\,\delta\,Ds = 0.$$

Or il est clair que Ds élément de la courbe du fil est

représenté par $\sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$; donc différentiant selon δ, on aura $\delta D s = \frac{D x \delta D x}{D s} + \frac{D y \delta D y}{D s} + \frac{D z \delta D z}{D s}$, & par conséquent $S R \delta D S = S R \frac{D x \delta D x}{D s} + S R \frac{D y \delta D y}{D s} + S R \frac{D z \delta D z}{D s}$; où il faudra encore faire disparoître les doubles différences marquées par δD sous le signe S, comme nous l'avons enseigné dans l'article 16 de la même Section.

Ainsi on changera le terme $S R \frac{D x \delta D x}{D s}$ en . . . $R'' \frac{D x'' \delta x''}{D s''} - R' \frac{D x' \delta x'}{D s'} - S \delta x D. \frac{R D x}{D s}$, en marquant par un trait les quantités qui se rapportent au commencement de l'intégrale, c'est-à-dire, à l'extrémité supérieure du fil, & par deux traits celles qui se rapportent au dernier point de l'intégrale, c'est-à-dire, à l'extrémité inférieure du fil.

On opérera de la même maniere sur les termes semblables, & l'on aura cette transformée, dans laquelle il ne se trouve sous le signe S que les simples variations δx, δy, δz.

$$S\left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} D m - D . \frac{R D x}{D s}\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} D m - D . \frac{R D y}{D s}\right)\delta y + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} D m - \pi D m - D . \frac{R D z}{D s}\right)\delta z\right]$$
$$+ R''\left(\frac{D x''}{D s''}\delta x'' + \frac{D y''}{D s''}\delta y'' + \frac{D z''}{D s''}\delta z''\right)$$
$$- R'\left(\frac{D x'}{D s'}\delta x' + \frac{D y'}{D s'}\delta y' + \frac{D z'}{D s'}\delta z'\right) = 0.$$

Comme ces variations sont indépendantes entr'elles, on

aura d'abord ces trois équations indéfinies pour tous les points du fil

$$\frac{d^2 x}{dt^2} Dm - D \cdot \frac{R Dx}{Ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} Dm - D \cdot \frac{R Dy}{Ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} Dm - \pi Dm - D \cdot \frac{R Dz}{Ds} = 0.$$

Quant aux termes affectés de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, on remarquera que si le fil est supposé fixe à ses deux extrémités, ces variations seront nulles d'elles-mêmes, & les termes dont il s'agit disparoîtront; de sorte que dans ce cas la solution du problême dépendra uniquement des trois équations précédentes.

Mais si le fil étant fixe dans son extrémité supérieure, a l'extrémité inférieure libre, alors il n'y aura que les trois variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ qui seront nulles, & pour faire disparoître les trois autres, il faudra supposer $R'' = 0$. Ainsi dans ce cas il faudra encore satisfaire à la condition que R soit nul à l'extrémité inférieure du fil.

A l'égard des valeurs de Ds & de Dm, il est clair que Ds, élément de la courbe du fil, est $= \sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$, & que Dm, masse de cet élément, est $= \varepsilon Ds$, ε étant l'épaisseur de cet élément.

42. Si on suppose que le fil s'éloigne très-peu de la figure rectiligne, c'est-à-dire de l'axe des z, ensorte que x & y soient toujours très-petites vis-à-vis de z, & par conséquent aussi Dx, Dy vis-à-vis de Dz, on aura aux quantités du second ordre près $Ds = Dz$. Et si on suppose de plus que

le fil ſoit très-peu extenſible, enſorte que les longueurs s ſoient preſque conſtantes relativement au tems, on aura $\frac{d.Ds}{dt}$, & par conſéquent auſſi $\frac{d.Dz}{dt}$ preſque nuls. La derniere équation ſe réduira donc à $\pi Dm + DR = 0$, d'où l'on tire en intégrant, $R = \text{conſt} - \pi S\varepsilon Ds$, puiſque $Dm = \varepsilon Ds$.

Dans la théorie ordinaire des cordes vibrantes, on fait abſtraction de la peſanteur de leurs particules, & on les ſuppoſe fixes par les deux extrémités. Faiſant donc dans ce cas π nul, on aura R conſtante, & prenant auſſi l'élément Ds ou Dz pour conſtant, on aura ces deux équations aux différences partielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{R}{\varepsilon} \cdot \frac{D^2x}{Dz^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{R}{\varepsilon} \cdot \frac{D^2y}{Dz^2} = 0,$$

dont l'intégrale complette eſt, dans le cas de ε conſtante,

$$x, y = f\left(z + t\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}\right) - F\left(z - t\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}\right),$$

f, & F dénotant deux fonctions arbitraires.

Cette formule contient toute la théorie des vibrations des cordes ſonores, comme on peut le voir dans les Mémoires des Académies de Berlin, de Pétersbourg & de Turin.

Dans le cas d'une chaîne peſante vibrante, l'extrémité inférieure étant libre, il faut que R y ſoit nul; par conſéquent ſi on fait commencer les intégrations repréſentées par la caractériſtique S au bout ſupérieur de la chaîne où $z = 0$, on aura $R = \pi(A - S\varepsilon Ds)$, A étant la valeur de l'intégrale $S\varepsilon Ds$ pour toute la longueur de la chaîne.

Faiſant donc cette ſubſtitution dans les deux premieres

équations, on aura, à cauſe de $Dm = \varepsilon Ds$, en prenant Ds pour conſtante,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \pi \frac{D.(A - S\varepsilon Ds)Dx}{\varepsilon Ds^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \pi \frac{D.(A - S\varepsilon Ds)Dy}{\varepsilon Ds^2} = 0.$$

Lorſque la chaîne eſt uniformément épaiſſe, alors ε eſt l'unité, $S\varepsilon Ds = s$, $A = l$ longueur de la chaîne, & les équations deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \pi \frac{D(l-s)Dx}{Ds^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \pi \frac{D(l-s)Dy}{Ds^2} = 0,$$

mais elles ne ſont intégrables par aucune méthode connue juſqu'ici.

43. Si on vouloit regarder le fil comme inextenſible, il faudroit effacer dans l'expreſſion de V le terme $S\int Rd\,Ds$, & par conſéquent dans l'équation générale le terme $SR\delta Ds$; mais il faudroit d'un autre côté tenir compte de l'invariabilité des élémens Ds, laquelle donne l'équation de condition $Ds - const = 0$; d'où réſultera le terme $S\lambda\delta Ds$ à ajouter au premier membre de la même équation (art. 13, Sect. précéd.). De ſorte que comme ce nouveau terme eſt entiérement ſemblable à celui qui doit être effacé, en prenant λ à la place de R, on aura toujours les mêmes formules.

Mais il faut remarquer à l'égard des cordes vibrantes, que dans le cas de l'inextenſibilité, on ne peut pas ſuppoſer les deux extrémités fixes comme dans celui de l'extenſibi-

lité; car pour que la corde ſoit tendue, il faut que l'une des extrémités ſoit tirée par une force qui tende à la mouvoir; & la ſuppoſition la plus ſimple eſt d'imaginer, comme dans l'art. 36, que la corde paſſe dans un anneau fixe, & ſoutienne enſuite un poids donné πM. De cette maniere on aura pour l'extrémité inférieure de la corde x'' & y'' nuls, & par conſéquent $\delta x'' = 0$, $\delta y'' = 0$; mais z'' ſera variable, & exprimera la diſtance verticale du poids πM, depuis l'origine des coordonnées z. Et il faudra pour avoir égard à l'action de ce poids, ajouter à la valeur de V le terme $-\pi M z''$, parce que l'action du poids tend à augmenter z'', & par conſéquent au premier membre de l'équation générale, le terme différentiel $-\pi M \delta z''$. Or puiſque $\delta z''$ n'eſt pas nul ici comme dans le cas de l'article 42, il doit reſter dans l'équation générale le terme $\lambda'' \frac{Dz''}{Ds''} \delta z''$, en mettant λ au lieu de R dans la formule de l'art. 41. Ce terme, étant ajouté au précédent, donne. . . $\left(\lambda'' \frac{Dz''}{Ds''} - \pi M\right) \delta z''$, quantité qui doit être nulle indépendamment de $\delta z''$; d'où l'on tire $\lambda'' \frac{Dz''}{Ds''} - \pi M = 0$, ou bien, à cauſe de $Dz'' = Ds''$ à très-peu près, $\lambda'' = \pi M$. Ainſi comme R, & par conſéquent auſſi λ eſt une quantité conſtante dans le cas des oſcillations très-petites, & en faiſant abſtraction de la peſanteur de la corde, on aura en général $\lambda = \pi M$. D'où l'on voit que la force de tenſion πM eſt dans le cas de l'inextenſibilité égale à la force de contraction R du fil ſuppoſé extenſible.

44. Ces différens exemples renferment à peu-près tous les problêmes que les Géomètres ont réſolus ſur le mouvement d'un corps ou d'un ſyſtême de corps; nous les

avons

avons choiſis à deſſein, pour qu'on puiſſe mieux juger des avantages de notre méthode, en comparant nos ſolutions avec celles que l'on trouve dans les ouvrages de MM. Euler, Clairaut, d'Alembert, &c, & dans leſquelles on ne parvient aux équations différentielles que par des raiſonnemens, des conſtructions & des analyſes ſouvent aſſez longues & compliquées. L'uniformité, & la rapidité de la marche de cette méthode ſont ce qui doit la diſtinguer principalement de toutes les autres, & ce que nous voulions ſur-tout faire voir dans ces applications.

SIXIEME SECTION.

Sur la rotation des Corps.

L'IMPORTANCE & la difficulté de cette queſtion m'engagent à y deſtiner une Section à part, & à la traiter à fond. Je donnerai d'abord les formules les plus générales, & en même-tems les plus ſimples pour repréſenter le mouvement de rotation d'un corps ou d'un ſyſtême de corps autour d'un point. Je déduirai enſuite de ces formules, par les méthodes de la Section quatrieme, les équations néceſſaires pour déterminer le mouvement de rotation d'un corps animé par des forces quelconques. Enfin je donnerai différentes applications de ces équations.

Quoique ce ſujet ait déja été traité par pluſieurs Géomètres, la théorie que nous allons en donner, n'en ſera pas moins utile. D'un côté elle fournira de nouveaux moyens de

résoudre le problême célèbre de la rotation des corps de figure quelconque; de l'autre elle servira à rapprocher & réunir sous un même point de vue, les solutions qu'on a déja données de ce problême, & qui sont toutes fondées sur des principes différens, & présentées sous diverses formes. Ces sortes de rapprochemens sont toujours instructifs, & ne peuvent qu'être très-utiles aux progrès de l'analyse; on peut même dire qu'ils y sont nécessaires dans l'état où elle est aujourd'hui; car à mesure que cette science s'étend & s'enrichit de nouvelles méthodes, elle en devient aussi plus compliquée; & on ne sauroit la simplifier qu'en généralisant & réduisant tout-à-la-fois les méthodes qui peuvent être susceptibles de ces avantages.

§. I.

Formules générales, relatives au Mouvement de rotation.

1. Les formules différentielles trouvées dans la premiere Partie (art. 55, Sect. cinquieme) pour exprimer les variations que peuvent recevoir les coordonnées d'un systême quelconque de points, dont les distances sont invariables, s'appliquent naturellement à la recherche dont il s'agit ici. Car cette supposition ne fait qu'anéantir les termes qui résulteroient des variations des distances entre les différens points; ensorte que les termes restans expriment ce que dans le mouvement du systême, il y a de général & de commun à tous les points, abstraction faite de leurs mouvemens relatifs; or c'est précisément ce mouvement commun & absolu que nous nous proposons ici d'examiner.

2. En changeant dans les formules dont nous venons de parler, la caractéristique δ en d, on aura pour le mouvement absolu du systême, ces trois équations

$$dx = d\lambda + z\,dM - y\,dN$$

$$dy = d\mu + x\,dN - z\,dL$$

$$dz = d\nu + y\,dL - x\,dM,$$

dans lesquelles x, y, z représentent à l'ordinaire les coordonnées de chaque point du systême par rapport à trois axes fixes & perpendiculaires entr'eux; & où $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, dL, dM, dN sont des quantités indéterminées, les mêmes pour tous les points, & qui ne dépendent que du mouvement du systême en général.

3. Soient maintenant x', y', z', les coordonnées pour un point déterminé du systême, on aura donc aussi

$$dx' = d\lambda + z'\,dM - y'\,dN$$

$$dy' = d\mu + x'\,dN - z'\,dL$$

$$dz' = d\nu + y'\,dL - x'\,dM;$$

par conséquent si on retranche ces formules des précédentes, & qu'on fasse pour plus de simplicité $x - x' = \xi$, $y - y' = \eta$, $z - z' = \zeta$, on aura ces équations différentielles

$$d\xi = \zeta\,dM - \eta\,dN$$

$$d\eta = \xi\,dN - \zeta\,dL$$

$$d\zeta = \eta\,dL - \xi\,dM,$$

dans lesquelles les variables ξ, η, ζ, représenteront les coor-

données des différens points du ſyſtême, priſes depuis un point déterminé du même ſyſtême, point que nous nommerons dorénavant le centre du ſyſtême.

4. Ces équations étant linéaires & du premier ordre ſeulement, il s'enſuit de la théorie connue de ces ſortes d'équations, que ſi on déſigne par ξ', ξ'', ξ''' trois valeurs particulieres de ξ, & par η', η'', η''', & ζ', ζ'', ζ''' les valeurs correſpondantes de η & ζ, on aura les intégrales complettes

$$\xi = a\,\xi' + b\,\xi'' + c\,\xi'''$$

$$\eta = a\,\eta' + b\,\eta'' + c\,\eta'''$$

$$\zeta = a\,\zeta' + b\,\zeta'' + c\,\zeta''',$$

a, b, c, étant trois conſtantes arbitraires.

Il eſt clair que ξ', η', ζ', ne ſont autre choſe que les coordonnées d'un point quelconque donné du ſyſtême, & que de même ξ'', η'', ζ'' & ξ''', η''', ζ''', ſont les coordonnées de deux autres points du ſyſtême auſſi donnés à volonté; ces coordonnées ayant leur origine commune dans le centre du ſyſtême.

Ainſi, en connoiſſant les ordonnées pour trois points donnés, on aura, par les formules précédentes, les valeurs des coordonnées pour tout autre point, valeurs qui ſeront des fonctions linéaires ſemblables des coordonnées données.

Mais il faut déterminer les conſtantes a, b, c.

Pour cela je remarque que puiſque dans les équations différentielles on a regardé comme invariables les diſtances entre les différens points du ſyſtême, ces diſtances doivent être des fonctions des conſtantes introduites par l'intégration; ainſi il faudra prendre quelques-unes de ces diſtances

pour données, afin de pouvoir déterminer les conftantes dont il s'agit.

Soit donc

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = A^2,$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = A'^2,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = A''^2,$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = A'''^2,$$
$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 = B'^2,$$
$$(\xi - \xi'')^2 + (\eta - \eta'')^2 + (\zeta - \zeta'')^2 = B''^2,$$
$$(\xi - \xi''')^2 + (\eta - \eta''')^2 + (\zeta - \zeta''')^2 = B'''^2,$$
$$(\xi' - \xi'')^2 + (\eta' - \eta'')^2 + (\zeta' - \zeta'')^2 = C'^2,$$
$$(\xi' - \xi''')^2 + (\eta' - \eta''')^2 + (\zeta' - \zeta''')^2 = C''^2,$$
$$(\xi'' - \xi''')^2 + (\eta'' - \eta''')^2 + (\zeta'' - \zeta''')^2 = C'''^2,$$

les diftances A, A', A'', A''', B', B'', &c; étant fuppofées données; & faifant pour abréger

$$F' = \frac{A^2 + A'^2 - B'^2}{2},\ F'' = \frac{A^2 + A''^2 - B''^2}{2},\ F''' = \frac{A^2 + A'''^2 - B'''^2}{2},$$

$$G' = \frac{A'^2 + A''^2 - C'^2}{2},\ G'' = \frac{A'^2 + A'''^2 - C''^2}{2},\ G''' = \frac{A''^2 + A'''^2 - C'''^2}{2},$$

on aura, à la place des fix dernieres équations, celles-ci plus fimples.

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = F',$$
$$\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = F'',$$
$$\xi\xi''' + \eta\eta''' + \zeta\zeta''' = F''',$$

$$\xi'\xi'' + n'n'' + \zeta'\zeta'' = G',$$

$$\xi'\xi''' + n'n''' + \zeta'\zeta''' = G'',$$

$$\xi''\xi''' + n''n''' + \zeta''\zeta''' = G'''.$$

Or, ſi dans les trois premieres de ces équations on ſubſtitue les valeurs de ξ, n, ζ de l'article précédent, on aura, en vertu des autres équations, les trois ſuivantes,

$$aA'^2 + bG' + cG'' = F',$$

$$aG' + bA''^2 + cG''' = F'',$$

$$aG'' + bG''' + cA'''^2 = F''',$$

d'où l'on tirera aiſément les valeurs de a, b, c.

5. Si les trois points du ſyſtême que nous avons pris pour donnés (art. 3) ſont diſpoſés, enſorte qu'ils forment des triangles rectangles autour du centre, lequel en ſera le ſommet commun, c'eſt-à-dire, que ces points ſoient pris dans trois droites paſſant par le centre, & formant entr'elles des angles droits, il eſt viſible qu'on aura alors $G' = 0$, $G'' = 0$, $G''' = 0$; & les trois équations ci-deſſus donneront ſur le champ

$$a = \frac{F'}{A'^2},\ b = \frac{F''}{A''^2},\ c = \frac{F'''}{A'''^2}.$$

6. Au reſte, quoique les trois points dont il s'agit ſoient à volonté, ſi on regarde comme données les ſix quantités A', A'', A''', G', G'', G''', il eſt clair que les coordonnées d'un quelconque de ces points ſeront déterminées par celles des deux autres; par exemple, les coordonnées ξ''', n''', ζ''', ſeront déterminées par les trois équations

$$\xi' \xi''' + n' n''' + \zeta' \zeta''' = G'',$$

$$\xi'' \xi''' + n'' n''' + \zeta'' \zeta''' = G''',$$

$$\xi'''^2 + n'''^2 + \zeta'''^2 = A'''^2,$$

lesquelles, dans le cas de $G' = 0$, $G'' = 0$, $G''' = 0$, donnent

$$\xi''' = (n' \zeta'' - \zeta' n'') \frac{A'''}{A' A''},$$

$$n''' = (\zeta' \xi'' - \xi' \zeta'') \frac{A'''}{A' A''},$$

$$\zeta''' = (\xi' n'' - n' \xi'') \frac{A'''}{A' A''}.$$

7. Quoique l'analyse précédente soit très-directe, on peut néanmoins parvenir aux mêmes résultats par une voie plus naturelle, en partant de cette considération géométrique, que la position d'un point quelconque dans l'espace, est entiérement déterminée par ses distances à trois points donnés.

En effet, supposons que les coordonnées de ces points soient x', y', z' pour le premier, x'', y'', z'' pour le second, & x''', y''', z''' pour le troisieme, & que x, y, z soient en général les coordonnées d'un autre point quelconque dont les distances à ces trois points-là soient représentées par l, m, n; il est clair qu'on aura ces trois équations,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = l^2$$

$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 = m^2,$$

$$(x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2 = n^2,$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer x, y, z en fonctions de x', y', z', x'', &c.

8. Pour faciliter cette détermination, nous nommerons de plus f, g, h les diſtances entre les trois points donnés, c'eſt-à-dire, les trois côtés du triangle formé par ces points; ce qui donnera ces trois équations,

$$(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2=f^2,$$

$$(x'''-x')^2+(y'''-y')^2+(z'''-z')^2=g^2,$$

$$(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2+(z'''-z'')^2=h^2,$$

Nous ferons enſuite pour abréger,

$$x-x'=\xi,\ y-y'=\eta,\ z-z'=\zeta,$$

$$x''-x'=\xi',\ y''-y'=\eta',\ z''-z'=\zeta',$$

$$x'''-x'=\xi'',\ y'''-y'=\eta'',\ z'''-z'=\zeta'';$$

& par ces ſubſtitutions les équations précédentes, ainſi que celles de l'article précédent, deviendront

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=f^2,$$

$$\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2=g^2,$$

$$(\xi''-\xi')^2+(\eta''-\eta')^2+(\zeta''-\zeta')^2=h^2,$$

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=l^2,$$

$$(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2=m^2,$$

$$(\xi-\xi'')^2+(\eta-\eta'')^2+(\zeta-\zeta'')^2=n^2,$$

leſquelles peuvent ſe changer en celles-ci plus ſimples,

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=f^2,$$

$$\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2=g^2,$$

$\xi'\xi''$

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2,$$

$$\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = \frac{f^2 + l^2 - m^2}{2},$$

$$\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = \frac{g^2 + l^2 - n^2}{2}.$$

9. La difficulté consiste maintenant à trouver les inconnues ξ, η, ζ dans les trois dernieres équations; or en faisant, pour abréger,

$$\frac{f^2 + l^2 - m^2}{2} = \mu, \quad \frac{g^2 + l^2 - n^2}{2} = \nu,$$

on tirera d'abord des deux dernieres,

$$\xi = \frac{\mu\eta'' - \nu\eta' - (\zeta'\eta'' - \zeta''\eta')\zeta}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

$$\eta = \frac{\mu\xi'' - \nu\xi' - (\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')\zeta}{\eta'\xi'' - \eta''\xi'},$$

& ces valeurs étant substituées dans l'équation $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2$, on aura, après avoir ordonné les termes,

$$((\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' + \eta'\xi'')^2)\zeta^2$$
$$+ 2((\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')(\mu\eta'' - \nu\eta') - (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')(\mu\xi'' - \nu\xi'))\zeta,$$
$$= (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2 l^2 - (\mu\xi'' - \nu\xi')^2 - (\mu\eta'' - \nu\eta')^2.$$

Représentons par A le coëfficient de ζ^2, par $2B$ celui de ζ, & par C les deux termes $(\mu\xi'' - \nu\xi')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2$, on aura à résoudre l'équation

$$A\zeta^2 + 2B\zeta = (\xi'\eta'' - \eta'\zeta'')^2 l^2 - C,$$

laquelle donne

$$A\zeta + B = \sqrt{((\xi'\eta'' - \eta'\zeta'')^2 l^2 A + B^2 - AC)}.$$

Or on a $B^2 - AC = (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 (\mu\eta'' - \nu\eta')^2$

$$- 2(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')(\mu\eta'' - \nu\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')$$

$$+ (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 (\mu\xi'' - \nu\xi')^2 - ((\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2$$

$$+ (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2)((\mu\xi'' - \nu\xi')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2)$$

$$= - 2(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')(\mu\eta'' - \nu\eta')(\mu\xi'' - \nu\xi')$$

$$- ((\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2)(\mu\eta'' - \nu\eta')^2$$

$$- ((\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2)(\mu\xi'' - \nu\xi')^2$$

$$= - ((\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')(\mu\eta'' - \nu\eta') + (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')(\mu\xi'' - \nu\xi'))^2$$

$$- (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2 ((\mu\eta'' - \nu\eta')^2 + (\mu\xi'' - \nu\xi')^2)$$

$$= - (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2 ((\mu\zeta'' - \nu\zeta')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2 + (\mu\xi'' - \nu\xi')^2);$$

de ſorte qu'en faiſant encore

$$(\mu\zeta'' - \nu\zeta')^2 + (\mu\eta'' - \nu\eta')^2 + (\mu\xi'' - \nu\xi')^2 = D,$$

on aura

$$A\zeta + B = (\xi'\eta'' - \eta''\xi'')\sqrt{(Al^2 - D)}.$$

Mais les valeurs de A, B, D ſe réduiſent aiſément aux expreſſions ſuivantes,

$$A = (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) - (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2$$

$$= f^2 g^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - h^2}{2}\right)^2,$$

$$B = \mu((\zeta'\zeta'' + \eta'\eta'' + \xi'\xi'')\zeta'' - (\zeta''^2 + \eta''^2 + \xi''^2)\zeta')$$

$$-\nu\left((\zeta'^2+\eta'^2+\xi'^2)\zeta''-(\zeta'\zeta''+\eta'\eta''+\xi'\xi'')\zeta'\right)$$

$$=\mu\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\zeta''-g^2\zeta'\right)-\nu\left(f^2\zeta''-\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\zeta'\right),$$

$$D=\mu^2(\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2)+\nu^2(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)-2\mu\nu(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')$$

$$=\mu^2 g^2+\nu^2 f^2-\mu\nu(f^2+g^2-h^2);$$

si donc on substitue ces valeurs, & qu'on fasse pour plus de simplicité,

$$a=\frac{\mu g^2-\nu\,\frac{f^2+g^2-h^2}{2}}{f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2},$$

$$b=\frac{\nu f^2-\mu\,\frac{f^2+g^2-h^2}{2}}{f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2},$$

$$c=\frac{\sqrt{\left((f^2g^2l^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2l^2-\mu^2g^2-\nu^2f^2+\mu\nu(f^2+g^2-h^2)\right)}}{f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2},$$

on aura

$$\zeta=a\zeta'+b\zeta''+c(\xi'\eta''-\eta'\xi'').$$

Pour avoir les valeurs de ξ & de η, il suffira de remarquer que les équations primitives demeurent les mêmes, en y changeant à la fois les quantités ζ, ζ', ζ'' en η, η', η'', ou en ξ, ξ', ξ''; or les quantités a, b étant des fonctions rationelles de f^2, g^2, h^2, l^2, m^2, n^2 ne peuvent que demeurer les mêmes aussi; & la quantité c étant exprimée par une fonction radicale des mêmes quantités f, g, &c, pourra changer de signe; c'est pourquoi on aura en général,

$$\eta = a\eta' + b\eta'' \pm c(\xi'\zeta'' - \zeta'\xi''),$$

$$\xi = a\xi' + b\xi'' \pm c(\zeta'\eta'' - \eta'\zeta'').$$

De plus pour déterminer les ſignes de c, il ſuffira de conſidérer les deux équations $\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = \mu$, $\xi''\xi + \eta''\eta' + \zeta''\zeta = \nu$; & ſubſtituant les valeurs précédentes de ζ, η, ξ, on verra que pour la vérification de ces équations, il ſera néceſſaire de prendre les ſignes inférieurs de c dans les expreſſions de η & de ξ.

Donc enfin on aura

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta''),$$

$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta''),$$

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c(\xi'\eta'' - \eta'\xi'').$$

10. Il eſt clair que dans ces expreſſions, les quantités a, b, c étant des fonctions des diſtances f, g, h, l, m, n, ne dépendent que de la poſition reſpective des différens points les uns par rapport aux autres; enſorte que ſi on regarde cette poſition comme invariable, ce qui a lieu à l'égard de tout corps ſolide, il faudra que a, b, c demeurent conſtantes, pendant que le corps ſe meut; & ces quantités ſeront ſeulement variables d'un point du corps à l'autre, au-lieu que les quantités ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', qui ſe rapportent à des points déterminés du corps, ſeront les mêmes relativement à tous les autres points, & varieront d'un moment à l'autre pendant le mouvement du corps.

Pour ſe former une idée plus nette de ces différentes quantités par rapport à un corps quelconque, on conſidérera que ſi par le point donné du corps qui répond aux coordonnées

x', y', z', & que nous avons nommée ci-deſſus le premier point, mais que nous nommerons dorénavant le centre du corps, ſi par ce point, dis-je, on mene trois axes parallèles aux axes des coordonnées x, y, z, les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, c'eſt-à-dire, les quantités ξ, η, ζ ne ſeront autre choſe que les coordonnées d'un point quelconque du corps par rapport à ces mêmes axes; de même les quantités ξ', η', ζ', & ξ'', η'', ζ'' ſeront les coordonnées des deux autres points donnés du corps rapportés aux mêmes axes.

Or comme la poſition de ces points dans le corps eſt arbitraire, on peut ſuppoſer pour plus de ſimplicité, que leurs diſtances au centre du corps ſoient $= 1$, & que de plus les droites menées par le centre & par les deux points dont il s'agit, forment entr'elles un angle droit; moyennant quoi on aura $f = 1$, $g = 1$, & $h^2 = f^2 + g^2 = 2$; ce qui ſimplifiera beaucoup les valeurs de a, b, c.

Qu'on imagine maintenant que le corps ſoit placé de maniere que les deux droites dont nous venons de parler, coincident avec les axes des coordonnées ξ & η, enſorte que l'on ait dans ce cas $\xi' = 1$, $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$, $\xi'' = 0$, $\eta'' = 1$, $\zeta'' = 0$; & les formules de l'article 9 donneront pour lors $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$.

D'où il s'enſuit que a, b, c ne ſont autre choſe que les coordonnées rectangles d'un point quelconque du corps, rapportées à trois axes paſſant par ſon centre, & fixes dans ſon intérieur, dont l'un paſſe par le point qui répond aux coordonnées ξ', η', ζ', l'autre par le point relatif aux ξ'', η'', ζ'', & le troiſieme ſoit perpendiculaire à ces deux-là.

11. Ainſi donc on aura pour chaque point du corps ou

ſyſtême les coordonnées,

$$x = x' + \xi,\ y = y' + \eta,\ z = z' + \zeta,$$

dans leſquelles

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$

$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

en faiſant pour abréger,

$$\xi''' = \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'',\ \eta''' = \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'',\ \zeta''' = \xi'\eta'' - \eta'\xi'';$$

mais il faudra que les ſix quantités ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' ſatisfaſſent à ces trois équations de condition (art. 8),

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$$

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1,$$

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0;$$

enſorte qu'il n'y aura en tout que ſix variables dépendantes du changement de ſituation du corps; ſavoir, les trois x', y', z' qui déterminent la poſition du centre dans l'eſpace, & trois des ſix ξ', η', ζ', ξ'', &c. Ces variables ſeront les mêmes relativement à tous les points; au contraire les trois quantités a, b, c ſeront différentes pour chaque point, & ne dépendront que de la poſition reſpective des points les uns par rapport aux autres.

Il eſt bon de remarquer, au reſte, que les trois quantités ξ''', η''', ζ''' ſont auſſi telles que

$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = 1,$$

$$\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = 0,$$

$$\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = 0;$$

la premiere de ces équations ſuit de ce que $(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + (\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2 + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2 = (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) - (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2 = 1$; & les deux autres ſont évidentes par elles-mêmes.

Ainſi l'on aura entre les neuf variables, ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''', η''', ζ''', ſix équations de condition toutes ſemblables, ce qui fait que ces quantités ſont permutables entr'elles.

12. Les formules qui viennent d'être trouvées par des conſidérations particulieres, peuvent ſe déduire auſſi immédiatement de la ſimple conſidération des coordonnées rectangles. En effet, puiſque ξ, η, ζ ſont les coordonnées d'un point quelconque du corps ou ſyſtême par rapport à trois axes qui ſe coupent perpendiculairement dans le centre, & que a, b, c ſont auſſi les coordonnées du même point, mais par rapport à trois autres axes qui ſe coupent pareillement dans ce même centre; il s'enſuit, 1°. que ξ, η, ζ peuvent s'exprimer en fonctions de a, b, c. 2°. que ces fonctions ne ſauroient être que linéaires; car ſi on ſuppoſe entre ξ, η, ζ une équation linéaire repréſentant un plan quelconque, il faudra que la transformée en a, b, c, ſoit linéaire auſſi, puiſqu'on ſait que l'équation d'un plan eſt toujours du premier degré, quelles que ſoient les coordonnées auxquelles on le rapporte. Ainſi les expreſſions de ξ, η, ζ en a, b, c ne peuvent être que de la forme ſuivante,

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$

$$\eta = b\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

les quantités ξ', ξ'', ξ''', η', &c, étant les mêmes pour tous les points du corps, & dépendant uniquement de la position des axes des a, b, c par rapport à ceux des ξ, η, ζ.

13. Or comme les coordonnées ξ, η, ζ & a, b, c ont la même origine, & répondent à un même point quelconque, il eſt clair que la diſtance de ce point à l'origine commune des coordonnées, ſera exprimée également par $\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$ & par $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$; donc il faut que les deux quantités $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ & $a^2 + b^2 + c^2$ ſoient identiques, & que par conſéquent la premiere devienne la ſeconde, en y ſubſtituant les valeurs de ξ, η, ζ en a, b, c.

Faiſant ces ſubſtitutions, & comparant les termes ſemblables, on aura les ſix équations de condition,

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1,\ \xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = 1,$$

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0,\ \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = 0,\ \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = 0,$$

par leſquelles les neuf variables ξ', η', ζ', ξ'', &c, ſe réduiront à trois indéterminées; & ces équations s'accordent, comme l'on voit, avec celles de l'article 11.

14. En général ſi on conſidere deux points quelconques, dont l'un réponde aux coordonnées ξ, η, ζ & l'autre aux coordonnées $\xi 1$, $\eta 1$, $\zeta 1$, & que a, b, c, $a 1$, $b 1$, $c 1$ ſoient les autres coordonnées répondantes aux mêmes points, il eſt clair que la diſtance entre ces deux points, ſera exprimée

également

également par $\sqrt{((\xi - \xi 1)^2 + (\eta - \eta 1)^2 + (\zeta - \zeta 1)^2)}$, & par $\sqrt{((a - a 1)^2 + (b - b 1)^2 + (c - c 1)^2)}$; de ſorte qu'il faudra que l'on ait toujours cette équation identique $(\xi - \xi 1)^2 + (\eta - \eta 1)^2 + (\zeta - \zeta 1)^2 = (a - a 1)^2 + (b - b 1)^2 + (c - c 1)^2$. Mais il eſt viſible que pour avoir $\xi 1, \eta 1, \zeta 1$, il n'y a qu'à changer a, b, c en $a 1, b 1, c 1$ dans les expreſſions générales de ξ, η, ζ; & qu'ainſi pour avoir les valeurs de $\xi - \xi 1$, $\eta - \eta 1$, $\zeta - \zeta 1$, il n'y aura qu'à mettre dans les mêmes expreſſions $a - a 1$, $b - b 1$, $c - c 1$ à la place de a, b, c. Subſtituant enſuite ces valeurs dans l'équation identique précédente, & comparant les termes, on aura les mêmes équations de condition trouvées ci-deſſus.

D'où l'on peut conclure que ces équations ſont les ſeules néceſſaires pour faire enſorte que la poſition reſpective des différens points du ſyſtême les uns par rapport aux autres, ſoit déterminée uniquement par les quantités a, b, c, & ne dépende en aucune maniere des quantités $\xi', \eta', \zeta'', \xi''$, &c.

15. On peut trouver auſſi par la même méthode d'autres relations remarquables entre les mêmes quantités $\xi', \eta', \zeta', \xi''$, &c, & qui peuvent être utiles dans pluſieurs occaſions.

Et d'abord ſi on ajoute enſemble les trois formules de l'article 12, après les avoir multipliées reſpectivement par ξ', η', ζ', ou par ξ'', η'', ζ'', ou par $\xi''', \eta''', \zeta'''$, on aura, en vertu des équations de condition de l'article précédent, ces formules inverſes,

$$a = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta',$$

$$b = \xi \xi'' + \eta \eta'' + \zeta \zeta'',$$

$$c = \xi \xi''' + \eta \eta''' + \zeta \zeta''';$$

donc ſubſtituant ces valeurs de a, b, c dans l'équation identique $a^2 + b^2 + c^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, on aura par la comparaiſon des termes, ces nouvelles équations de condition,

$$\xi'^2 + \xi''^2 + \xi'''^2 = 1,\ \eta'^2 + \eta''^2 + + \eta'''^2 = 1,\ \zeta'^2 + \zeta''^2\,\zeta'''^2 = 1,$$

$$\xi'\eta' + \xi''\eta'' + \xi'''\eta''' = 0,\ \xi'\zeta' + \xi''\zeta'' + \xi'''\zeta''' = 0,\ \eta'\zeta' + \eta''\zeta'' + \eta'''\zeta''' = 0,$$

leſquelles ſont néceſſairement une ſuite de celles de l'article précédent, puiſqu'elles réſultent de la même équation identique.

16. Mais ſi on cherche directement les valeurs de a, b, c par la réſolution des équations de l'article 12, on aura, d'après les formules connues,

$$a = \frac{\xi(\eta''\zeta''' - \eta'''\zeta'') + \eta(\zeta''\xi''' - \zeta'''\xi'') + \zeta(\xi''\eta''' - \eta''\xi''')}{k},$$

$$b = \frac{\xi(\zeta'\eta''' - \zeta'''\eta') + \eta(\xi'\zeta''' - \xi'''\zeta') + \zeta(\eta'\xi''' - \eta'''\xi')}{k},$$

$$c = \frac{\xi(\eta\zeta'' - \eta''\zeta') + \eta(\zeta'\xi'' - \zeta''\xi') + \zeta(\xi'\eta'' - \xi''\eta')}{k},$$

en ſuppoſant

$$k = \xi'\eta''\zeta''' - \eta'\xi''\zeta''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' + \eta'\zeta''\xi''' - \zeta'\eta''\xi'''.$$

Ces expreſſions doivent donc être identiques avec celles de l'article précédent; ainſi en comparant les coëfficiens des quantités ζ, η, ζ, on aura les équations ſuivantes,

$$\eta''\zeta''' - \eta'''\zeta'' = k\xi',\ \zeta''\xi''' - \zeta'''\xi'' = k\eta',\ \xi''\eta''' - \eta''\xi''' = k\zeta',$$

$$\zeta'\eta''' - \zeta'''\eta' = k\xi'',\ \xi'\zeta''' - \xi'''\zeta' = k\eta',\ \eta'\xi''' - \eta'''\xi' = k\zeta'',$$

$$\eta'\zeta'' - \eta''\zeta' = k\xi''',\ \zeta'\xi'' - \zeta''\xi' = k\eta''',\ \xi'\eta'' - \xi''\eta' = k\xi'''.$$

Or ſi on ajoute enſemble les carrés des trois premieres,

on a $(\eta''\zeta'''-\eta'''\zeta'')^2+(\zeta''\xi'''-\zeta'''\xi'')^2+(\xi''\eta'''-\eta''\xi''')^2$ $=k^2(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)$; le premier membre peut ſe mettre ſous cette forme $(\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2)(\xi'''^2+\eta'''^2+\zeta'''^2)$ $-(\xi''\xi'''+\eta''\eta'''+\zeta''\zeta''')^2$; donc par les équations de condition de l'article 13, cette équation ſe réduit à $1=k^2$, d'où $k=\pm 1$.

Pour ſavoir lequel des deux ſignes on doit prendre, il n'y a qu'à conſidérer la valeur de k dans un cas particulier; or le cas le plus ſimple eſt celui où les trois axes des coordonnées a, b, c coïncideroient avec les trois axes des coordonnées ξ, η, ζ, auquel cas on auroit $\xi=a$, $\eta=b$, $\xi=c$, & par conſéquent par les formules de l'article 12, $\xi'=1$,, $\eta''=1$, $\zeta'''=1$, & toutes les autres quantités ξ'', ξ''', &c, nulles. En faiſant ces ſubſtitutions dans l'expreſſion générale de k, elle devient $=1$. Donc on aura toujours $k=1$.

Au reſte, on voit que les trois dernieres équations ci-deſſus ſont les mêmes que celles que l'on a ſuppoſées dans l'article 11; & les ſix autres s'en déduiſent naturellement par analogie.

17. Ainſi, ſi on vouloit réduire les neuf quantités ξ', ξ'', ξ''', η', &c, à trois indéterminées, il ſuffiroit d'y réduire les ſix ξ', ξ'', η', η'', ζ', ζ'', par le moyen des trois équations de condition $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=1$, $\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2=1$, $\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta''=0$, puiſque les trois autres ξ''', η''', ζ''' ſont déja connues en fonctions de celles-là.

En prenant, par exemple, ξ', η', & ξ'' pour indéterminées, la premiere équation donnera d'abord

$$\zeta'=\sqrt{(1-\xi'^2-\eta'^2)};$$

& il n'y aura plus qu'à déterminer η'', ζ'' par les deux équa-

tions $\eta''^2 + \zeta''^2 = 1 - \xi''^2$, & $\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = - \xi'\xi''$. Or on a $(\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2 + (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 = (\eta'^2 + \zeta'^2)(\eta''^2 + \zeta''^2)$ équation identique; donc $(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'')^2 = (\eta'^2 + \zeta'^2)(\eta''^2 + \zeta''^2) - (\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2 = (1 - \xi'^2)(1 - \xi''^2) - \xi'^2\xi''^2 = 1 - \xi'^2 - \xi''^2$. Ainsi en combinant les deux équations $\eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = - \xi'\xi''$ & $\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = \sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi''^2)}$, on aura

$$\eta'' = - \frac{\xi'\xi''\eta' + \zeta'\sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi''^2)}}{\eta'^2 + \zeta'^2},$$

$$\zeta'' = - \frac{\xi'\xi''\zeta' - \eta'\sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi''^2)}}{\eta'^2 + \zeta'^2}.$$

Ensuite les trois dernieres formules de l'article précédent donneront

$$\xi''' = \eta'\zeta'' - \eta''\zeta', \quad \eta''' = \zeta'\xi'' - \zeta''\xi', \quad \zeta''' = \xi'\eta'' - \xi''\eta'.$$

18. Pour réduire toutes ces expressions à une forme rationelle & entiere, il n'y aura qu'à faire $\xi' = \cos\lambda$, $\eta' = \sin\lambda\cos\mu$, $\xi'' = \sin\lambda\cos\nu$, ce qui donnera $\zeta' = \sin\lambda\sin\mu$, $\eta'' = -\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - \sin\mu\sin\nu$, $\zeta'' = -\cos\lambda\sin\mu\cos\nu + \cos\mu\sin\nu$, $\xi''' = \sin\lambda\sin\nu$, $\eta''' = \sin\mu\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu\sin\nu$, $\zeta''' = -\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda\sin\mu\sin\nu$.

Et il n'est pas difficile de concevoir d'après ce qui a été dit dans l'article 10, que λ sera l'angle que l'axe des coordonnées *a* fait avec celui des ξ, que μ sera celui que le plan, passant par ces deux axes, fait avec le plan des coordonnées ξ & ζ, & qu'enfin ν sera l'angle que le plan des coordonnées *a*, *b* fait avec le plan passant par les axes des coordonnées ξ & *a*. De sorte que si on regarde l'axe des coordonnées *a*, qui est censé passer toujours par les mêmes points du systême, comme un axe de rotation du systême;

λ ſera l'inclinaiſon de cet axe à l'axe fixe des coordonnées ξ; μ ſera l'angle que le même axe de rotation décrit en tournant autour de cet axe fixe, & λ ſera l'angle que le ſyſtême lui-même décrit en tournant autour de ſon axe de rotation. Mais nous donnerons plus bas une maniere plus ſimple & plus naturelle, d'employer la conſidération de ces angles.

19. Lorſqu'il s'agit d'un corps ſolide, les quantités a, b, c, doivent demeurer conſtantes, tandis que le corps change de ſituation dans l'eſpace; parce que la condition de la ſolidité conſiſte en ce que tous les points du corps gardent invariablement les mêmes diſtances entr'eux. Ainſi dans ce cas les axes des coordonnées a, b, c, doivent être cenſés fixes dans l'intérieur du corps, mais mobiles par rapport aux axes des autres coordonnées ξ, η, ζ, axes qui ſont ſuppoſés fixes dans l'eſpace.

Or quel que puiſſe être le changement de ſituation du corps autour de ſon centre, on peut démontrer qu'il y aura toujours une ligne droite paſſant par ce centre, laquelle conſervera la même ſituation, & pour laquelle les coordonnées ξ, η, ζ ſeront les mêmes.

Car puiſqu'on a en général, pour une ſituation quelconque du corps, les formules $\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$, $\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$, $\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$; ſi on ſuppoſe que dans une autre ſituation quelconque du corps, les quantités ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', &c, deviennent $\xi 1$, $\eta 1$, $\zeta 1$, $\xi' 1$, $\eta' 1$, $\zeta' 1$, &c, on aura auſſi pour cette nouvelle ſituation, $\xi 1 = a\xi' 1 + b\xi'' 1 + c\xi''' 1$, $\eta 1 = a\eta' 1 + b\eta'' 1 + c\eta''' 1$, $\zeta 1 = a\zeta' 1 + b\zeta'' 1 + c\zeta''' 1$; & s'il y a, dans le corps, des

points qui ne changent pas de place, il eſt clair qu'on aura pour chacun de ces points les conditions $\xi = \xi 1$, $\eta = \eta 1$, $\zeta = \zeta 1$.

De ſorte que tous les points de cette eſpece ſe trouveront déterminés par ces trois équations $\xi - \xi 1 = 0$, $\eta - \eta 1 = 0$, $\zeta - \zeta 1 = 0$; ſavoir,

$$a(\xi' - \xi' 1) + b(\xi'' - \xi'' 1) + c(\xi''' - \xi''' 1) = 0,$$
$$a(\eta' - \eta' 1) + b(\eta'' - \eta'' 1) + c(\eta''' - \eta''' 1) = 0,$$
$$a(\zeta' - \zeta' 1) + b(\zeta'' - \zeta'' 1) + c(\zeta''' - \zeta''' 1) = 0.$$

Ainſi les valeurs de a, b, c, tirées de ces équations, donneront la poſition de ces mêmes points dans le corps; mais il eſt viſible qu'en éliminant deux quelconques des trois inconnues a, b, c, la troiſieme s'en ira auſſi; il faudra donc que l'équation réſultante ait lieu d'elle-même; & elle a lieu en effet, comme on va le voir.

20. Pour cela j'ajoute enſemble les trois équations précédentes, après les avoir multipliées reſpectivement par $\xi' + \xi' 1$, $\eta' + \eta' 1$, $\zeta' + \zeta' 1$; & ayant égard aux équations de condition de l'article 13, ainſi qu'aux équations ſemblables qui doivent avoir lieu entre $\xi' 1$, $\eta' 1$, &c, on aura

$$0 = b(\xi'' \xi' 1 + \eta'' \eta' 1 + \zeta'' \zeta' 1 - \xi' \xi'' 1 - \eta' \eta'' 1 - \zeta' \zeta'' 1)$$
$$+ c(\xi''' \xi' 1 + \eta''' \eta' 1 + \zeta''' \zeta' 1 - \xi' \xi''' 1 - \eta' \eta''' 1 - \zeta' \zeta''' 1).$$

Si on ajoute enſemble les mêmes équations, même après les avoir multipliées reſpectivement par $\xi'' + \xi'' 1$, $\eta'' + \eta'' 1$, $\zeta'' + \zeta'' 1$, on trouvera de la même maniere,

$$0 = a(\xi' \xi'' 1 + \eta' \eta'' 1 + \zeta' \zeta'' 1 - \xi'' \xi' 1 - \eta'' \eta' 1 - \zeta'' \zeta' 1)$$
$$+ c(\xi''' \xi'' 1 + \eta''' \eta'' 1 + \zeta''' \zeta'' 1 - \xi'' \xi''' 1 - \eta'' \eta''' 1 - \zeta'' \zeta''' 1).$$

Enfin les mêmes équations étant multipliées reſpectivement par $\xi''' + \xi''' 1$, $\eta''' + \eta'''$, $\zeta''' 1 + \zeta''' 1$, & enſuite ajoutées, donneront

$$0 = a(\xi' \xi''' 1 + \eta' \eta''' 1 + \zeta' \zeta''' 1 - \xi''' \xi' 1 - \eta''' \eta' 1 - \zeta''' \zeta' 1)$$

$$+ b(\xi'' \xi''' 1 + \eta'' \eta''' 1 + \zeta'' \zeta''' 1 - \xi''' \xi'' 1 - \eta''' \eta'' 1 - \zeta''' \zeta'' 1).$$

Ces transformées équivalent viſiblement aux équations propoſées; ainſi, en faiſant pour abréger

$$2P = \xi''' \xi'' 1 + \eta''' \eta'' 1 + \zeta''' \zeta'' 1 - \xi'' \xi''' 1 - \eta'' \eta''' 1 - \zeta'' \zeta''' 1,$$

$$2Q = \xi' \xi''' 1 + \eta' \eta''' 1 + \zeta' \zeta''' 1 - \xi''' \xi' 1 - \eta''' \eta' 1 - \zeta''' \zeta' 1,$$

$$2R = \xi'' \xi' 1 + \eta'' \eta' 1 + \zeta'' \zeta' 1 - \xi' \xi'' 1 - \eta' \eta'' 1 - \zeta' \zeta'' 1,$$

on aura à réſoudre ces trois équations,

$$bR - cQ = 0,$$
$$cP - aR = 0,$$
$$aQ - bP = 0,$$

dont la troiſieme eſt, comme l'on voit, une ſuite des deux premieres. Or celles-ci donnent $\frac{b}{c} = \frac{Q}{R}$, $\frac{a}{c} = \frac{P}{R}$. D'où l'on tire $a = hP$, $b = hQ$, $c = hR$, en prenant pour h une quantité arbitraire.

21. Telles ſont donc les valeurs des coordonnées a, b, c, pour tous les points du corps qui ſe retrouveront dans la même poſition après la rotation du corps autour de ſon centre ſuppoſé immobile; & il eſt clair que ces coordonnées répondent à une ligne droite paſſant par ce centre, & faiſant reſpectivement avec leurs axes des angles dont les coſinus ſont

$\frac{P}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}$, $\frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}$, $\frac{R}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}$.

Ainſi la rotation du corps, quelque compoſée qu'elle ſoit, ſera en dernier réſultat, équivalente à une rotation ſimple qui ſe feroit faite autour de la ligne dont il s'agit, ſuppoſée fixe; & par conſéquent on pourra appeller cettte même ligne, l'axe de *rotation* du corps.

22. On peut donc déterminer la poſition de cet axe, relativement aux axes des coordonnées a, b, c, par le moyen des trois quantités P, Q, R, ainſi qu'on vient de le voir; mais ſi on vouloit rapporter cette poſition aux axes des coordonnées ξ, η, ζ, il n'y auroit qu'à ſubſtituer dans les expreſſions de ces coordonnées (art. 12) à la place de a, b, c, leurs valeurs hP, hQ, hR; ce qui donneroit $\xi = hL$, $\eta = hM$, $\zeta = hN$, en faiſant pour abréger

$$L = \xi' P + \xi'' Q + \xi''' R,$$

$$M = \eta' P + \eta'' Q + \eta''' R,$$

$$N = \zeta' P + \zeta'' Q + \zeta''' R.$$

Ces valeurs de ξ, η, ζ répondent donc à tous les points de l'axe de rotation; par conſéquent cet axe fait avec ceux des coordonnées ξ, η, ζ, des angles dont les coſinus ſont repréſentés reſpectivement par $\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$, . . . $\frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$, $\frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$. De ſorte que les quantités L, M, N ſont entiérement analogues aux quantités P, Q, R, avec cette différence, que tandis que celles-ci ſe rapportent aux axes mobiles des coordonnées a, b, c, celles-là ſe rapportent aux axes mobiles des coordonnées

données ξ, η, ζ. Et l'on remarquera que $L^2 + M^2 + N^2 = P^2 + Q^2 + R^2$, ce qui ſuit de ce que l'on a généralement $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Au reſte, ſi dans les expreſſions de L, M, N, on ſubſtitue les valeurs de P, Q, R (art. 20), & qu'on y emploie les réductions de l'article 16, on aura

$$2L = \eta'\zeta'1 + \eta''\zeta''1 + \eta'''\zeta'''1 - \zeta'\eta'1 - \zeta''\eta''1 - \zeta'''\zeta'''1,$$

$$2M = \zeta'\xi'1 + \zeta''\eta''1 + \zeta'''\eta'''1 - \xi'\zeta'1 - \xi''\zeta''1 - \xi'''\zeta'''1,$$

$$2N = \xi'\eta'1 + \xi''\eta''1 + \xi'''\eta'''1 - \eta'\xi'1 - \eta''\xi''1 - \eta'''\xi''1.$$

23. Si on ne conſidere que le mouvement du corps dans un inſtant, l'axe de rotation dont nous venons de parler, ſera fixe pendant cet inſtant, & le corps tournera réellement & ſpontanément autour de cet axe, qui ſera par conſéquent *l'axe ſpontanée de rotation* du corps, comme on l'appelle ordinairement.

Pour déterminer donc cet axe, on ſuppoſera que les quantités $\xi'1$, $\eta'1$, $\zeta'1$, $\xi''1$, &c, ne ſoient qu'infiniment peu différentes de ξ', η', ζ', ξ'', &c, enſorte que l'on ait $\xi'1 = \zeta' + d\xi'$, $\eta'1 = \eta' + d\eta'$, $\zeta'1 = \zeta' + d\zeta'$, $\xi''1 = \xi'' + d\xi''$, &c; ce qui donnera (art. 20)

$$2P = \xi'''d\xi'' + \eta'''d\eta'' + \zeta'''d\zeta'' - \xi''d\xi''' - \eta''d\eta''' - \zeta''d\zeta''',$$

$$2Q = \xi'd\xi''' + \eta'd\eta''' + \zeta'd\zeta''' - \xi'''d\xi' - \eta'''d\eta' - \zeta'''d\zeta',$$

$$2R = \xi''d\xi' + \eta''d\eta' + \zeta''d\zeta' - \xi'd\xi'' - \eta'd\eta'' - \zeta'd\zeta''.$$

Mais les trois dernieres équations de condition de l'article 13 étant différentiées, donnent $\xi'd\xi'' + \eta'd\eta'' + \zeta'd\zeta'' = -\xi''d\xi' - \eta''d\eta' - \zeta''d\zeta'$, $\xi'''d\xi' + \eta'''d\eta' + \zeta'''d\zeta'$

$= -\xi' d\xi''' - \eta' d\eta''' - \zeta' d\zeta'''$, $\xi'' d\xi''' + \eta'' d\eta''' + \zeta'' d\zeta'''$ $= -\xi''' d\eta'' - \eta''' d\eta'' - \zeta''' d\zeta''$; donc ſubſtituant ces valeurs & changeant, pour conſerver l'homogénéité P, Q, R, en dP, dQ, dR, on aura

$$dP = \xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta'',$$

$$dQ = \xi' \; d\xi''' + \eta' \; d\eta''' + \zeta' \; d\zeta''',$$

$$dR = \xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta'.$$

Ainſi, $\frac{dP}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}$, $\frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}$ . . . $\frac{dR}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}$ ſeront les coſinus des angles que l'axe *ſpontanée* de rotation fera avec les axes des coordonnées a, b, c (art. 21).

24. Si on fait les mêmes ſubſtitutions dans les expreſſions de L, M, N de l'article 22, & qu'on ait égard aux trois dernieres équations de condition de l'article 15, différentiées, on aura, en changeant L, M, N en dL, dM, dN, ces formules

$$dL = \eta' d\zeta' + \eta'' d\zeta'' + \eta''' d\zeta''',$$

$$dM = \zeta' d\xi' + \zeta'' d\xi'' + \zeta''' d\xi''',$$

$$dN = \xi' d\eta' + \xi'' d\eta'' + \xi''' d\eta''',$$

par leſquelles on pourra déterminer la poſition de l'axe *ſpontanée* de rotation à l'égard des axes des coordonnées ξ, η, ζ; car le premier de ces axes fera avec les trois autres des angles, dont les coſinus ſeront exprimés par $\frac{dL}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}$, $\frac{dM}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}$, $\frac{dN}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}$.

Et si l'on veut faire dépendre les valeurs de dL, dM, dN de celles de dP, dQ, dR, on aura, comme dans le même article 22, les formules

$$dL = \xi' dP + \xi'' dQ + \xi''' dR,$$
$$dM = \eta' dP + \eta'' dQ + \eta''' dR,$$
$$dN = \zeta' dP + \zeta'' dQ + \zeta''' dR;$$

lesquelles donnent sur le champ, en vertu des équations de condition de l'article 13,

$$dL^2 + dM^2 + dN^2 = dP^2 + dQ^2 + dR^2.$$

25. Les quantités dL, dM, dN ont encore une autre utilité dans la détermination du mouvement du corps; elles servent à exprimer d'une maniere fort simple les différentielles des coordonnées ξ, η, ζ. En effet, si on différentie les formules de l'article 12, en y regardant toujours a, b, c, comme constantes, par la nature des corps solides; on a d'abord

$$d\xi = a\,d\xi' + b\,d\xi'' + c\,d\xi''',$$
$$d\eta = a\,d\eta' + b\,d\eta'' + c\,d\eta''',$$
$$d\zeta = a\,d\zeta' + b\,d\zeta'' + c\,d\zeta''';$$

si ensuite on substitue dans ces formules les expressions de a, b, c trouvées dans l'article 15, & qu'on ait égard aux équations de condition de ce même article différentiées, on aura sur sur le champ (art. 24)

$$d\xi = \zeta\,dM - \eta\,dN,$$
$$d\eta = \xi\,dN - \zeta\,dL,$$
$$d\zeta = \eta\,dL - \xi\,dM,$$

équations entiérement ſemblables à celles de l'article 3, & qui font voir par conſéquent que les quantités dL, dM, dN ſont les mêmes de part & d'autre.

26. Ces formules ſont auſſi de la même forme que celles qui ont été trouvées dans l'article 7 de la troiſieme Section de la premiere Partie, par la conſidération des rotations particulieres autour des trois axes des coordonnées; d'où l'on peut conclure immédiatement, 1°. que les quantités dL, dM, dN repréſentent les angles élémentaires décrits par le corps autour des axes des coordonnées ξ, η, ζ; & comme les quantités dP, dQ, dR ſont relativement aux axes des coordonnées a, b, c, ce que dL, dM, dN ſont à l'égard des axes des ξ, η, ζ, il s'enſuit auſſi que dP, dQ, dR ſont les angles élémentaires décrits autour des axes des a, b, c: 2°. Que ces rotations particulieres ſe compoſent en une ſeule autour d'un axe, faiſant avec ceux des coordonnées ξ, η, ζ, ou a, b, c des angles dont les coſinus ſont $\frac{dL}{\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}}$, $\frac{dM}{\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}}$, $\frac{dN}{\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}}$, ou $\frac{dP}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}}$, $\frac{dQ}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}}$, $\frac{dR}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}}$, ainſi qu'on l'a déja vu ci-deſſus. 3°. Que l'angle élémentaire décrit autour de cet axe, ſera exprimé par $\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}$, ou par $\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}$; ces deux quantités étant égales par l'article 24.

27. Nous venons d'exprimer les différentielles $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ d'une maniere fort ſimple par les quantités dL, dM, dN; on peut également les exprimer par les quantités analogues dP, dQ, dR; & pour cela il n'y a qu'à ſubſtituer à la

place de ces quantités-là leurs valeurs données par les dernieres formules de l'article 24.

On aura ainsi ces transformées,

$$d\xi = (\zeta\eta' - \eta\zeta')\,dP + (\zeta\eta'' - \eta\zeta'')\,dQ + (\zeta\eta''' - \eta\zeta''')\,dR,$$

$$d\eta = (\xi\zeta' - \zeta\xi')\,dP + (\xi\zeta'' - \zeta\xi'')\,dQ + (\xi\zeta''' - \xi\zeta''')\,dR,$$

$$d\zeta = (\eta\xi' - \xi\eta')\,dP + (\eta\xi'' - \xi\eta'')\,dQ + (\eta\xi''' - \xi\eta''')\,dR;$$

lesquelles, en remettant pour ξ, η, ζ, leurs valeurs (art. 12), & ayant égard aux réductions de l'article 16, se réduisent à cette forme,

$$d\xi = (b\xi''' - c\xi'')\,dP + (c\xi' - a\xi''')\,dQ + (a\xi'' - b\xi')\,dR,$$

$$d\eta = (b\eta''' - c\eta'')\,dP + (c\eta' - a\eta''')\,dQ + (a\eta'' - b\eta')\,dR,$$

$$d\zeta = (b\zeta''' - c\zeta'')\,dP + (c\zeta' - a\zeta''')\,dQ + (a\zeta'' - b\zeta')\,dR.$$

Et comme ces expressions doivent être identiques avec celles qui résulteroient de la différentiation immédiate des mêmes formules de l'article 12, on aura par la comparaison des termes affectés de a, b, c,

$$d\xi' = \xi''\,dR - \xi'''\,dQ,$$

$$d\xi'' = \xi'''\,dP - \xi'\,dR,$$

$$d\xi''' = \xi'\,dQ - \xi''\,dP,$$

$$d\eta' = \eta''\,dR - \eta'''\,dQ,$$

$$d\eta'' = \eta'''\,dP - \eta'\,dR,$$

$$d\eta''' = \eta'\,dQ - \eta''\,dP,$$

$$d\zeta' = \zeta''\,dR - \zeta'''\,dQ,$$

$$d\zeta'' = \zeta'''\,dP - \zeta'\,dR,$$

$$d\zeta''' = \zeta'\,dQ - \zeta''\,dP.$$

28. Les expressions précédentes de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, ont été trouvées, en supposant a, b, c constantes; si on vouloit y regarder aussi ces quantités comme variables, il n'y auroit qu'à ajouter à ces expressions les termes dus aux différences de a, b, c; & on verroit par les formules de l'art. 12, que ces termes seroient $\xi' da + \xi'' db + \xi''' dc$, $\eta' da + \eta'' db + \eta''' dc$, $\zeta' da + \zeta'' db + \zeta''' dc$; on auroit ainsi pour les valeurs complettes de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$,

$$\begin{aligned} d\xi = {} & \xi'(c\,dQ - b\,dR + da), \\ & + \xi''(a\,dR - c\,dP + db), \\ & + \xi'''(b\,dP - a\,dQ + dc), \\ d\eta = {} & \eta'(c\,dQ - b\,dR + da), \\ & + \eta''(a\,dR - c\,dP + db), \\ & + \eta'''(b\,dP - a\,dQ + dc), \\ d\zeta = {} & \zeta'(c\,dQ - b\,dR + da), \\ & + \zeta''(a\,dR - c\,dP + db), \\ & + \zeta'''(b\,dP - a\,dQ + dc). \end{aligned}$$

Ces formules sont fort remarquables par leur simplicité & uniformité, & ont cela de particulier que les quantités ξ', η', &c, disparoissent totalement de la quantité $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$; car en vertu des équations de condition de l'article 13, on aura simplement

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (c\,dQ - b\,dR + da)^2 + (a\,dR - c\,dP + db)^2 + (b\,dP - a\,dQ + dc)^2,$$

expression qui nous sera fort utile.

29. Nous avons déja montré dans l'article 18, comment on peut exprimer rationellement toutes les quantités ξ', η', ζ', ξ'', &c, par des ſinus & coſinus de trois angles indéterminés; mais il y a un moyen plus direct & plus naturel de parvenir à ces mêmes réductions, & ce moyen conſiſte à employer les transformations connues des coordonnées rectangles.

En effet, puiſque ξ, η, ζ ſont les coordonnées rectangles d'un point quelconque du corps, par rapport à trois axes menés par ſon centre parallélement aux axes fixes des coordonnées x, y, z, & que a, b, c ſont les coordonnées rectangles du même point par rapport à trois autres axes paſſant par le même centre, mais fixes au dedans du corps, & par conſéquent de poſitions variables à l'égard des axes des ξ, η, ζ; il s'enſuit que pour avoir les expreſſions de ξ, η, ζ en a, b, c, il n'y aura qu'à transformer de la maniere la plus générale, ces dernieres coordonnées, dans les autres.

Pour cela nous nommerons ω l'angle que le plan des a, b, fait avec celui des ξ, η; & ψ l'angle que l'interſection de ces deux plans fait avec l'axe des ξ; enfin nous déſignerons par φ l'angle que l'axe des a fait avec la même ligne d'interſection; ces trois quantités ω, ψ, φ, ſerviront, comme l'on voit, à déterminer la poſition des axes des coordonnées a, b, c, relativement aux axes des coordonnées ξ, η, ζ; & par conſéquent on pourra, par leur moyen, exprimer ces dernieres par les autres.

Si, pour fixer les idées, on imagine que le corps propoſé ſoit la terre, que le plan des a, b ſoit celui de l'équateur, & que l'axe des a paſſe par un méridien donné; que de

plus le plan des ξ, η, ſoit celui de l'écliptique, & que l'axe des ξ ſoit dirigé vers le premier point d'Ariès; il eſt clair que l'angle ω deviendra l'obliquité de l'écliptique, que l'angle ψ ſera la longitude de l'équinoxe d'automne, ou du nœud aſcendant de l'équateur ſur l'écliptique, & que φ ſera la diſtance du méridien donné à cet équinoxe.

En général φ ſera l'angle que le corps décrit en tournant autour de l'axe des coordonnées c, axe qu'on pourra, à cauſe de cela, appeller ſimplement *l'axe du corps*, $90^\circ - \omega$, ſera l'angle d'inclinaiſon de cet axe ſur le plan fixe des coordonnées ξ, η, & $\psi - 90^\circ$ ſera l'angle que la projection de ce même axe fait avec l'axe des coordonnées ξ.

30. Cela poſé, ſuppoſons d'abord que l'on change les deux coordonnées a, b, en deux autres a', b', placées dans le même plan, de telle maniere que l'axe des a' ſoit dans l'interſection des deux plans; & que celui des b' ſoit perpendiculaire à cette interſection; on aura

$$a' = a \cos\varphi - b \sin\varphi,\ b' = b \cos\varphi + a \sin\varphi.$$

Suppoſons enſuite que les deux coordonnées b', c, ſoient changées en deux autres b'', c', dont l'une b'' ſoit toujours perpendiculaire à l'interſection des plans, mais ſoit placée dans le plan des ξ, η, & dont l'autre c' ſoit perpendiculaire à ce dernier plan; on trouvera pareillement

$$b'' = b' \cos\omega - c \sin\omega,\ c' = c \cos\omega + b' \sin\omega.$$

Enfin ſuppoſons encore que l'on change les coordonnées a', b'', qui ſont déja dans le plan des ξ, η, en deux autres a'', b''', placées dans ce même plan, mais telles que l'axe des

des a'' coïncide avec l'axe des ξ; on trouvera de la même maniere

$$a'' = a' \operatorname{cof} \psi - b'' \operatorname{fin} \psi, \quad b''' = b'' \operatorname{cof} \psi + a' \operatorname{fin} \psi.$$

Et il eſt viſible que les trois coordonnées a'', b''', c' ſeront la même choſe que les coordonnées ξ, η, ζ, puiſqu'elles ſont rapportées aux mêmes axes; de ſorte qu'en ſubſtituant ſucceſſivement les valeurs de a', b'', b', on aura les expreſſions de ξ, η, ζ, en a, b, c, leſquelles ſe trouveront de la même forme que celles de l'article 12, en ſuppoſant

$$\xi' = \operatorname{cof} \varphi \operatorname{cof} \psi - \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \psi \operatorname{cof} \omega,$$

$$\xi'' = - \operatorname{fin} \varphi \operatorname{cof} \psi - \operatorname{cof} \varphi \operatorname{fin} \psi \operatorname{cof} \omega,$$

$$\xi''' = \operatorname{fin} \psi \operatorname{fin} \omega,$$

$$\eta' = \operatorname{cof} \varphi \operatorname{fin} \psi + \operatorname{fin} \varphi \operatorname{cof} \psi \operatorname{cof} \omega,$$

$$\eta'' = - \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \psi + \operatorname{cof} \varphi \operatorname{cof} \psi \operatorname{cof} \omega,$$

$$\eta''' = - \operatorname{cof} \psi \operatorname{fin} \omega,$$

$$\zeta' = \operatorname{fin} \varphi \operatorname{fin} \omega,$$

$$\zeta'' = \operatorname{cof} \varphi \operatorname{fin} \omega,$$

$$\zeta''' = \operatorname{cof} \omega.$$

Ces valeurs ſatisfont auſſi aux ſix équations de condition de l'article 13, ainſi qu'à celles de l'article 15, & réſolvent ces équations dans toute leur étendue, puiſqu'elles renferment trois variables indéterminées φ, ψ, ω.

31. Si maintenant on ſubſtitue ces valeurs dans les expreſſions des quantités dP, dQ, dR de l'article 23, on aura,

après les réductions ordinaires des ſinus & coſinus,

$$dP = \text{ſin}\,\varphi\;\text{ſin}\,\omega\, d\psi + \text{coſ}\,\varphi\, d\omega,$$

$$dQ = \text{coſ}\,\varphi\;\text{ſin}\,\omega\, d\psi - \text{ſin}\,\varphi\, d\omega,$$

$$dR = d\varphi + \text{coſ}\,\omega\, d\psi.$$

Et ſi on fait les mêmes ſubſtitutions dans les expreſſions des quantités dL, dM, dN de l'article 24, on trouvera

$$dL = \text{ſin}\,\psi\;\text{ſin}\,\omega\, d\varphi + \text{coſ}\,\psi\, d\omega,$$

$$dM = -\text{coſ}\,\psi\;\text{ſin}\,\omega\, d\varphi + \text{ſin}\,\psi\, d\omega,$$

$$dN = \text{coſ}\,\omega\, d\varphi + d\psi.$$

Ainſi on pourra par le moyen de ces formules déterminer les élémens de la rotation inſtantanée du corps autour de l'axe ſpontanée, en connoiſſant la rotation du corps autour de ſon axe, & la poſition de cet axe dans l'eſpace.

32. Il faut bien diſtinguer ces deux axes & les mouvemens de rotation qui s'y rapportent.

Nous venons de repréſenter le mouvement du corps autour de ſon centre par les trois angles φ, ω, ψ, dont le premier φ exprime l'angle décrit par le corps, en tournant autour d'une droite ou axe qui paſſe par ce centre, & qui ait une poſition conſtante à l'égard des différens points du corps, mais qui ſoit d'ailleurs mobile avec lui; le ſecond angle ω ſert à déterminer l'inclinaiſon de cet axe ſur le plan des coordonnées ξ, η, dont la direction eſt ſuppoſée donnée & fixe dans l'eſpace, & cette inclinaiſon eſt exprimée par l'angle $90° - \omega$; enfin le troiſieme angle ψ détermine la poſition de la projection du même axe ſur ce plan, cette pro-

jection faisant avec l'axe des abscisses ξ, un angle $= \psi - 90^\circ$.

Mais cet axe de rotation étant mobile avec le corps, n'est pas le vrai axe autour duquel le corps tourne réellement à chaque instant; ce dernier est celui que nous avons nommé axe spontanée de rotation, & dont la position dans l'espace dépend des quantités dL, dM, dN (art. 24). Or ayant trouvé ci-dessus les valeurs de ces quantités en φ, ψ, & ω, il est facile de déterminer aussi la position de ce même axe, & l'angle de rotation autour de lui par des angles analogues aux angles φ, ψ, ω, & que nous désignerons par φ', ψ', ω'. En effet, les expressions de dL, dM, dN en φ, ψ, ω étant générales pour telle position de l'axe du corps qu'on voudra, elles auront lieu aussi pour l'axe spontanée de rotation, en y changeant φ, ψ, ω, en φ', ψ' ω'; mais comme la propriété de ce dernier axe est d'être immobile pendant un instant, il faudra que les différentielles $d\psi'$, $d\omega'$, dues au changement de position de cet axe soient nulles. De sorte que l'on aura relativement à cet axe,

$$dL = \sin\psi' \sin\omega' \, d\varphi', \quad dM = -\cos\psi' \sin\omega' \, d\varphi',$$
$$dN = \cos\omega' \, d\varphi'.$$

Comparant donc ces nouvelles expressions de dL, dM, dN avec les premieres, on aura ces trois équations,

$$\sin\psi' \sin\omega' \, d\varphi' = \sin\psi \sin\omega \, d\varphi + \cos\psi \, d\omega,$$
$$\cos\psi' \sin\omega' \, d\varphi' = \cos\psi \sin\omega \, d\varphi - \sin\psi \, d\omega,$$
$$\cos\omega' \, d\varphi' = \cos\omega \, d\varphi + d\psi,$$

lesquelles serviront à déterminer les élémens relatifs à l'axe spontanée de rotation par ceux qui se rapportent à l'axe même du corps, ou réciproquement ceux-ci par ceux-là; ce qui peut être utile en différentes occasions.

§. II.

Équations pour le mouvement de rotation d'un corps ſolide, de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

33. Nous venons de voir dans le Paragraphe précédent, que quelque mouvement que puiſſe avoir un corps ſolide, ce mouvement ne peut dépendre que de ſix variables, dont trois ſe rapportent au mouvement d'un point unique du corps, que nous avons appellé le centre du corps, & dont les trois autres ſervent à déterminer le mouvement de rotation du corps autour de ce centre. D'où il ſuit que les équations qu'il s'agit de trouver ne peuvent être qu'au nombre de ſix au plus; & il eſt clair que ces équations peuvent par conſéquent ſe déduire de celles que nous avons déja données dans la Section troiſieme (art. 2, 6, 8), leſquelles ſont générales pour tout ſyſtême de corps. Mais pour cela il faut diſtinguer deux cas, l'un quand le corps eſt tout-à-fait libre, l'autre quand il eſt aſſujetti à ſe mouvoir autour d'un point fixe.

34. Conſidérons d'abord un corps ſolide abſolument libre; prenons le centre du corps dans ſon centre même de gravité; & nommant x', y', z' les trois coordonnées rectangles de ce centre, m la maſſe entiere du corps, dm chacun de ſes élémens, & X, Y, Z les forces accélératrices qui agiſſent ſur chaque point de cet élément ſuivant les directions des mêmes coordonnées, nous aurons en premier lieu ces trois équations (Sect. 3, art. 3).

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} m + SXdm = 0,$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} m + SYdm = 0,$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} m + SZdm = 0,$$

dans lesquelles la caractéristique S dénote des intégrales totales relatives à toute la masse du corps; & ces équations serviront, comme l'on voit, à déterminer le mouvement du centre de gravité.

En second lieu, si on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées rectangles de chaque élément dm, prises depuis le centre de gravité, & parallèles aux mêmes axes des coordonnées x', y', z' de ce centre, on aura ces trois autres équations (Sect. citée, art. 8).

$$S\left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X\right) dm = 0,$$

$$S\left(\xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X\right) dm = 0,$$

$$S\left(\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y\right) dm = 0.$$

Or nous avons prouvé dans le Paragraphe précédent que les valeurs des quantités ξ, η, ζ, sont toujours de cette forme,

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$

$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$

$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''';$$

& nous y avons vu que pour les corps solides, les quantités

a, *b*, *c* ſont néceſſairement conſtantes par rapport au tems, & variables uniquement par rapport aux différens élémens *dm*, puiſque ces quantités repréſentent les coordonnées rectangles de chacun de ces élémens, rapportées à trois axes qui ſe croiſent dans le centre du corps, & qui ſont fixes dans ſon intérieur; qu'au contraire, les quantités ξ', ξ'', &c, ſont variables par rapport au tems, & conſtantes pour tous les élémens du corps, ces quantités étant toutes des fonctions de trois angles φ, ψ, ω, qui déterminent les différens mouvemens de rotation que le corps avoit autour de ſon centre. Si donc on fait, dans les équations précédentes, ces différentes ſubſtitutions, en ayant ſoin de faire ſortir hors des ſignes S les variables φ, ψ, ω & leurs différences, on aura trois équations différentielles du ſecond ordre entre ces mêmes variables & le tems t, leſquelles ſerviront à les déterminer toutes trois en fonctions de t.

Ces équations ſeront ſemblables à celles que M. d'Alembert a trouvées le premier pour le mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque, & dont il a fait un uſage ſi utile dans ſes recherches ſur la préciſion des équinoxes.

Par cette raiſon, & parce que d'ailleurs la forme de ces équations n'a pas toute la ſimplicité dont elles ſont ſuſceptibles, nous ne nous arrêterons pas ici à les détailler; mais nous allons plutôt réſoudre directement le problême par la méthode générale de la Section quatrieme, laquelle donnera immédiatement les équations les plus ſimples & les plus commodes pour le calcul.

35. Pour employer ici cette méthode de la maniere la plus générale & la plus ſimple, on ſuppoſera, ce qui eſt le cas de la na-

ture, que chaque particule Dm du corps ſoit attirée par des forces $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, &c, proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$, &c, de la même particule aux centres de ces forces, & on formera de-là la quantité algébrique,

$$\Pi = \int (\overline{P}\, d\overline{p} + \overline{Q}\, d\overline{q} + \overline{R}\, d\overline{r} + \&c).$$

On conſidérera enſuite les deux quantités

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\, dt^2}\right) Dm, \quad V = S\, \Pi\, Dm,$$

en rapportant la caractériſtique intégrale S uniquement aux élémens Dm du corps, & aux quantités relatives à la poſition de ces élémens dans le corps.

On réduira ces deux quantités en fonctions de variables quelconques, ξ, ψ, φ, &c, relatives aux divers mouvemens du corps, & on en formera la formule générale ſuivante (Sect. quatrieme, art. 9),

$$\begin{aligned} o = & \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi}\right) \delta \xi, \\ & + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi}\right) \delta \psi, \\ & + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi}\right) \delta \varphi. \\ & \&c. \end{aligned}$$

Si les variables ξ, ψ, φ, &c, ſont par la nature du problême indépendantes entr'elles (& on peut toujours les prendre telles qu'elles le ſoient) on égalera ſéparément à zéro les quantités multipliées par chacune des variations

indéterminées $\delta \xi$, $\delta \psi$, $\delta \varphi$, &c, & l'on aura ainſi autant d'équations entre les variables ξ, ψ, φ, &c, qu'il y a de ces variables.

Si les variables dont il s'agit ne ſont pas tout-à-fait indépendantes, mais qu'il y ait entr'elles une ou pluſieurs équations de condition, on aura par la différentiation de ces équations, autant d'équations de condition entre les variations $\delta \xi$, $\delta \psi$, $\delta \varphi$, &c, par le moyen deſquelles on pourra réduire ces variations à un plus petit nombre.

Ayant fait cette réduction dans la formule générale, on y égalera pareillement à zéro, chacun des coëfficiens des variations reſtantes; & les équations qui en proviendront, jointes à celles de condition données, ſuffiront pour réſoudre le problême.

Dans celui dont il s'agit ici, il n'y aura qu'à faire uſage des transformations enſeignées dans le Paragraphe précédent. Ainſi on ſubſtituera d'abord $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$, au lieu de x, y, z, enſuite $a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$, $a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$, $a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$, au lieu de ξ, η, ζ (art. 11); enfin mettant pour ξ', η', &c, leurs valeurs en φ, ψ, ω de l'article 30, on aura les quantités T, V exprimées en fonctions des ſix variables indépendantes x', y', z', φ, ψ, ω, à la place deſquelles on pourra encore, ſi on le juge à propos, en introduire d'autres équivalentes; & chacune d'elles fournira pour la détermination du mouvement du corps, une équation de cette forme,

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\alpha} - \frac{\delta T}{\delta \alpha} + \frac{\delta V}{\delta \alpha} = 0,$$

α étant une de ces variables.

36. Commençons donc par mettre dans l'expression de T, à la place de x, y, z, ces nouvelles variables $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$; & faisant sortir hors du signe S les x', y', z', qui sont les mêmes pour tous points du corps, puisque ce sont les coordonnées du centre du corps; la fonction T deviendra

$$\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2}m+S\left(\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{2dt^2}\right)dm$$

$$+\frac{dx'\,S\,d\xi\,dm+dy'\,S\,d\eta\,dm+dz'\,S\,d\zeta\,dm}{dt^2}.$$

Cette expression est composée, comme l'on voit, de trois parties, dont la premiere ne contient que les seules variables x', y', z', & exprime la valeur de T dans le cas où le corps seroit regardé comme un point. Si donc ces variables sont indépendantes des autres variables ξ, η, ζ, ce qui a lieu, lorsque le corps est libre de tourner en tous sens autour de son centre, la formule dont il s'agit devra être traitée séparément, & fournira pour le mouvement de ce centre, les mêmes équations que si le corps y étoit concentré; ainsi cette partie du problême rentre dans celui que nous avons résolu dans la Section précédente, & auquel nous renvoyons.

La troisieme partie de l'expression précédente, celle qui contient les différences dx', dy', dz', multipliées par les différences $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, disparoît d'elle-même dans deux cas; lorsque le centre du corps est fixe, ce qui est évident, parce qu'alors les différences dx', dy', dz' des coordonnées de ce centre sont nulles; & lorsque ce centre est supposé placé dans le centre même de gravité du corps, car

alors les intégrales $S d\xi dm$, $S d\eta dm$, $S d\zeta dm$, deviennent nulles d'elles-mêmes. En effet, en y ſubſtituant pour $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ leurs valeurs $a d\xi' + b d\xi'' + c d\xi'''$, $a d\eta' + b d\eta'' + c d\eta'''$, $a d\zeta' + b d\zeta'' + c d\zeta'''$ (art. préc.), & faiſant ſortir hors du ſigne S les quantités $d\xi'$, $d\xi''$, &c, qui ſont indépendantes de la poſition des particules dm dans le corps, chaque terme de ces intégrales ſe trouvera multiplié par une de ces trois quantités, $S a dm$, $S b dm$, $S c dm$; or ces quantités ne ſont autre choſe que les ſommes des produits de chaque élément dm, multiplié par ſa diſtance à trois plans paſſant par le centre du corps, & perpendiculaires aux axes des coordonnées a, b, c; elles ſont donc nulles, quand ce centre coïncide avec celui de gravité de tout le corps, par les propriétés connues de ce dernier centre. Donc auſſi les trois intégrales $S d\xi dm$, $S d\eta dm$, $S d\zeta dm$ ſeront nulles dans ce cas.

Dans l'un & dans l'autre cas, il ne reſtera donc à conſidérer dans l'expreſſion de T, que la formule . . . . $S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\right) dm$, qui eſt uniquement relative au mouvement de rotation que le corps peut avoir autour de ſon centre, & qui ſervira par conſéquent à déterminer les loix de ce mouvement, indépendamment de celui que le centre même peut avoir dans l'eſpace.

Pour rendre la ſolution la plus ſimple qu'il eſt poſſible, il eſt à propos de faire uſage des expreſſions de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, de l'article 28, leſquelles donnent en faiſant $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$,

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (c\,dQ - b\,dR)^2$$

$$+(adR - cdP)^2 + (bdP - adQ)^2$$
$$= (b^2 + c^2)dP^2 + (a^2 + c^2)dQ^2 + (a^2 + b^2)dR^2$$
$$- 2bc\,dQ\,dR - 2ac\,dP\,dR - 2ab\,dP\,dQ.$$

Or les quantités a, b, c étant ici les ſeules variables, relativement à la poſition des particules Dm dans le corps; il s'enſuit que pour avoir la valeur de $S(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)Dm$, il n'y aura qu'à multiplier chaque terme de la quantité précédente par Dm, & intégrer enſuite relativement à la caractériſtique S, en faiſant ſortir hors de ce ſigne les quantités dP, dQ, dR qui en ſont indépendantes. Ainſi la quantité $S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}\right)Dm$ deviendra

$$\frac{AdP^2 + BdQ^2 + CdR^2}{2dt^2} - \frac{FdQdR + GdPdR + HdPdQ}{dt^2}$$

en faiſant pour abréger,

$$A = S(b^2 + c^2)Dm,\ B = S(a^2 + c^2)Dm,\ C = S(a^2 + b^2)Dm,$$
$$F = SbcDm,\ G = SacDm,\ H = SabDm.$$

Ces intégrations ſont relatives à toute la maſſe du corps, en ſorte que A, B, C, F, G, H, doivent être déſormais regardées & traitées comme des conſtantes données par la figure du corps.

37. Si on fait pour plus de ſimplicité $\frac{dP}{dt} = p$, $\frac{dQ}{dt} = q$, $\frac{dR}{dt} = r$ on aura, en ne conſidérant dans la fonction T, que les termes relatifs au mouvement de rotation,

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hpq;$$

ainſi T n'étant fonction que de p, q, r on aura en différentiant ſelon δ,

$$\delta T = \frac{dT}{dp}\,\delta p + \frac{dT}{dq}\,\delta q + \frac{dT}{dr}\,\delta r.$$

Or par les formules de l'article 31, on a

$$p = \frac{\text{ſin}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega\,d\psi + \text{coſ}\,\varphi\,d\omega}{dt},$$

$$q = \frac{\text{coſ}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega\,d\psi - \text{ſin}\,\varphi\,d\omega}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi + \text{coſ}\,\omega\,d\psi}{dt};$$

donc (dt étant toujours conſtant)

$$\delta T = \left(\frac{dT}{dp}\,q - \frac{dT}{dq}\,p\right)\delta\varphi + \frac{dT}{dr} \times \frac{\delta d\varphi}{dt}$$
$$+ \left(\frac{dT}{dp}\,\text{ſin}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega + \frac{dT}{dq}\,\text{coſ}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega + \frac{dT}{dr}\,\text{coſ}\,\varphi\right)\frac{\delta d\psi}{dt}$$
$$+ \left(\frac{dT}{dp}\,\text{ſin}\,\varphi\,\text{coſ}\,\omega + \frac{dT}{dq}\,\text{coſ}\,\varphi\,\text{coſ}\,\omega - \frac{dT}{dr}\,\text{ſin}\,\omega\right)\frac{d\psi\,d\omega}{dt}$$
$$+ \left(\frac{dT}{dp}\,\text{coſ}\,\varphi - \frac{dT}{dq}\,\text{ſin}\,\varphi\right)\frac{\delta d\omega}{dt};$$

d'où l'on aura ſur le champ, pour le mouvement de rotation du corps, ces trois équations du ſecond ordre,

$$\frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} - \frac{dT}{dp}\,q + \frac{dT}{dq}\,p + \frac{\delta V}{\delta\varphi} = 0,$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\,\text{ſin}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega + \frac{dT}{dq}\,\text{coſ}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega + \frac{dT}{dr}\,\text{coſ}\,\omega\right)}{dt} + \frac{\delta V}{\delta\psi} = 0,$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\,\text{coſ}\,\varphi - \frac{dT}{dq}\,\text{ſin}\,\varphi\right)}{dt} -$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\sin\varphi\cos\omega+\frac{dT}{dq}\cos\varphi\cos\omega-\frac{dT}{dr}\sin\omega\right)\frac{d\psi}{dt}+\frac{\delta V}{\delta\omega}=0.$$

A l'égard de la quantité V, comme elle dépend des forces qui ſollicitent le corps, elle ſera nulle ſi le corps n'eſt animé par aucune force; ainſi dans ce cas les trois quantités $\frac{\delta V}{\delta\varphi}$, $\frac{\delta V}{\delta\psi}$, $\frac{\delta V}{\delta\omega}$, ſeront nulles auſſi; & la ſeconde des trois équations précédentes ſera intégrable d'elle-même; mais l'intégration générale de toutes ces équations reſtera encore fort difficile.

En général, puiſque $V = S\,\Pi\,Dm$, & que Π eſt une fonction algébrique des diſtances $\overline{p}$, $\overline{q}$, &c (art. 35), dont chacune eſt exprimée par $\sqrt{((x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2)}$, en déſignant par f, g, h, les coordonnées du centre fixe des forces; il n'y aura qu'à faire dans la fonction Π les mêmes ſubſtitutions que ci-deſſus, & après avoir intégré relativement à toute la maſſe du corps, on aura l'expreſſion de V en φ, ψ, ω, d'où l'on tirera par la différentiation ordinaire les valeurs de $\frac{\delta V}{\delta\varphi}$, $\frac{\delta V}{\delta\psi}$, $\frac{\delta V}{\delta\omega}$, qui ſont les mêmes que celles de $\frac{dV}{d\varphi}$, $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\omega}$. Comme ceci n'a point de difficulté, nous ne nous y arrêterons point; nous remarquerons ſeulement que les équations précédentes reviennent à celles que j'ai données autrefois dans mes premieres recherches ſur la *libration de la Lune*.

38. Quoique l'emploi des angles φ, ψ, ω, paroiſſe être ce qu'il y a de plus ſimple pour trouver par notre méthode les équations de la rotation du corps; on peut néanmoins parvenir encore plus directement au but, & obtenir même

des formules plus élégantes & plus commodes pour le calcul dans plusieurs cas, en considérant immédiatement les variations des quantités ξ', ξ'', ξ''', η', &c, & réduisant ensuite ces différentes variations à trois indéterminées, par des formules analogues à celles de l'article 27.

Ainsi, puisque $p = \frac{dP}{dt} =$ (article 23) .... $\frac{\xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta''}{dt}$, on aura en différenciant par δ, (dt étant constant),

$$\delta p = \frac{\xi''' \delta d\xi'' + \eta''' \delta d\eta'' + \zeta''' \delta d\zeta''}{dt}$$
$$+ \frac{d\xi'' \delta\xi''' + d\eta'' \delta\eta''' + d\zeta'' \delta\zeta'''}{dt};$$

donc le terme $\frac{dT}{dp}\delta p$ de la valeur de δT donnera dans la formule générale de l'article 35, les termes

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\xi'''\right)}{dt}\delta\xi'' + \frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\eta'''\right)}{dt}\delta\eta'' + \frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\zeta'''\right)}{dt}\delta\zeta''$$
$$- \frac{dT}{dp} \times \frac{d\xi'' \delta\xi''' + d\eta'' \delta\eta''' + d\zeta'' \delta\zeta'''}{dt},$$

savoir,

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dt}(\xi''' \delta\xi'' + \eta''' \delta\eta'' + \zeta''' \delta\zeta'')$$
$$+ \frac{dT}{dp} \times \frac{d\xi''' \delta\xi'' + d\eta''' \delta\eta'' + d\zeta''' \delta\zeta'' - d\xi'' \delta\xi''' - d\eta'' \delta\eta''' - d\zeta'' \delta\zeta'''}{dt}.$$

Pareillement le terme $\frac{dT}{dq}\delta q$ donnera dans la même formule les termes

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dt}(\xi'\delta\xi'''+\eta'\delta\eta'''+\zeta'\delta\zeta''')$$

$$+\frac{dT}{dq}\times\frac{d\xi'\delta\xi'''+d\eta'\delta\eta'''+d\zeta'\delta\zeta'''-d\xi'''\delta\xi'-d\eta'''\delta\eta'-d\zeta'''\delta\zeta'}{dt};$$

& enfin le terme $\frac{dT}{dr}\delta r$ donnera ceux-ci:

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dt}(\xi''\delta\xi'+\eta''\delta\eta'+\zeta''\delta\zeta')$$

$$+\frac{dT}{dr}\times\frac{d\xi''\delta\xi'+d\eta''\delta\eta'+d\zeta''d\zeta'-d\xi'\delta\xi''-d\eta'\delta\eta''-d\zeta'\delta\zeta''}{dr}.$$

Or ayant trouvé en général

$$d\xi'=\xi''dR-\xi'''dQ,\ d\xi''=\xi'''dP-\xi'dR$$
$$d\xi'''=\xi'dQ-\xi''dP,\ d\eta'=\eta''dR-\eta'''dQ,\ \&c.$$

(art. 27), dP, dQ, dR étant des quantités indéterminées, il est clair qu'on peut donner aussi aux variations $\delta\xi'$, $\delta\xi''$, $\delta\xi'''$, $\delta\eta'$, &c, la même forme en changeant d en δ; ainsi on aura

$$\delta\xi'=\xi''\delta R-\xi'''\delta Q,\ \delta\xi''=\xi'''\delta P-\xi'\delta R$$
$$\delta\xi'''=\xi'\delta Q-\xi''\delta P,\ \delta\eta'=\eta''\delta R-\eta'''\delta Q,\ \&c,$$

les trois quantités δP, δQ, δR étant aussi indéterminées & indépendantes entr'elles.

Faisant ces substitutions, & ayant égard aux équations de condition de l'article 13, on trouvera

$$\xi'''\delta\xi''+\eta'''\delta\eta''+\zeta'''\delta\zeta''=\delta P,$$
$$\xi'\delta\xi'''+\eta'\delta\eta'''+\zeta'\delta\zeta'''=\delta Q,$$
$$\xi''\delta\xi'+\eta''\delta\eta'+\zeta''\delta\zeta'=\delta R,$$

expreſſions analogues à celles de dP, dQ, dR (art. 23); & de plus,

$$d\xi''\delta\xi' + d\eta''\delta\eta' + d\zeta''\delta\zeta' = -dP\delta Q,$$

$$d\xi'''\delta\xi' + d\eta'''\delta\eta' + d\zeta'''\delta\zeta' = -dP\delta R,$$

$$d\xi'\delta\xi'' + d\eta'\delta\eta'' + d\zeta'\delta\zeta'' = -dQ\delta P,$$

$$d\xi'''\delta\xi'' + d\eta'''\delta\eta'' + d\zeta'''\delta\zeta'' = -dQ\delta R,$$

$$d\xi'\delta\xi''' + d\eta'\delta\eta''' + d\zeta'\delta\zeta''' = -dR\delta P,$$

$$d\xi''\delta\xi''' + d\eta''\delta\eta''' + d\zeta''\delta\zeta''' = -dR\delta Q.$$

Donc les quantités trouvées ci-deſſus réſultantes des termes $\frac{dT}{dp}\delta p$, $\frac{dT}{dq}\delta q$, $\frac{dT}{dr}\delta r$ de la valeur de δT, deviendront en mettant p, q, r pour $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dR}{dt}$,

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dt}\delta P + \frac{dT}{dp}(r\delta Q - q\delta R),$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dt}\delta Q + \frac{dT}{dq}(p\delta R - r\delta P),$$

$$\frac{d.\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dt}\delta R + \frac{dT}{dr}(q\delta P - p\delta Q),$$

dont la ſomme ſera par conſéquent le réſultat des termes dûs à la variation de T, dans l'équation générale dont il s'agit.

Quant aux termes relatifs à la variation de V, puiſque V devient une fonction algébrique de ξ', ξ'', ξ''', η', &c, après la ſubſtitution de $x' + a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$, $y' + a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$, $z' + a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$, au lieu de x, y, z, le

le ſigne intégral S n'ayant rapport qu'aux quantités a, b, c, il n'y aura qu'à différentier par δ, & mettre enſuite pour $\delta\xi'$, $\delta\xi''$, &c, leurs valeurs dans δP, δQ, δR; ainſi puiſque $\frac{\delta V}{\delta \xi'} = \frac{dV}{d\xi'}$, $\frac{\delta V}{\delta \xi''} = \frac{dV}{d\xi''}$, &c, on aura dans la même équation les termes ſuivans,

$$\frac{dV}{d\xi'}(\xi''\delta R - \xi'''\delta Q) + \frac{dV}{d\xi''}(\xi'''\delta P - \xi'\delta R) +$$
$$\frac{dV}{d\xi'''}(\xi'\delta Q - \xi''\delta P) + \frac{dV}{d\eta'}(\eta''\delta R - \eta'''\delta Q) + \&c.$$

Donc enfin raſſemblant tous les termes multipliés par chacune des trois quantités δP, δQ, δR, on aura une équation générale de cette forme,

$$0 = (P)\delta P + (Q)\delta Q + (R)\delta R,$$

dans laquelle

$$(P) = \frac{d \cdot \frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq}$$
$$+ \xi'''\frac{dV}{d\xi''} + \eta'''\frac{dV}{d\eta''} + \zeta'''\frac{dV}{d\zeta''} - \xi''\frac{dV}{d\xi'''} - \eta''\frac{dV}{d\eta'''} - \zeta''\frac{dV}{d\zeta'''},$$

$$(Q) = \frac{d \cdot \frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr}$$
$$+ \xi'\frac{dV}{d\xi'''} + \eta'\frac{dV}{d\eta'''} + \zeta'\frac{dV}{d\zeta'''} - \xi'''\frac{dV}{d\xi'} - \eta'''\frac{dV}{d\eta'} - \zeta'''\frac{dV}{d\zeta'},$$

$$(R) = \frac{d \cdot \frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr}$$
$$+ \xi''\frac{dV}{d\xi'} + \eta''\frac{dV}{d\eta'} + \zeta''\frac{dV}{d\zeta'} - \xi'\frac{dV}{d\xi''} - \eta'\frac{dV}{d\eta''} - \zeta'\frac{dV}{d\zeta''}.$$

Et comme les trois quantités δP, δQ, δR ſont indépendantes entr'elles, & en même tems arbitraires, on aura donc ces trois équations particulieres $(P) = 0$, $(Q) = 0$, $(R) = 0$, leſquelles étant combinées avec les ſix équations de condition entre les neuf variables ξ', ξ'', &c, (art. 13), ſerviront à déterminer chacune de ces variables.

On peut mettre, ſi l'on veut, ſous une forme plus ſimple, les termes de ces équations dépendans de la quantité V. Car puiſque $V = S\,\Pi\,Dm$, aura (à cauſe que le ſigne S ne regarde point les variables ξ', ξ'', &c), ... $\xi''\frac{dV}{d\xi'} = S\,\xi''\frac{d\Pi}{d\xi'}Dm$, $\eta''\frac{dV}{d\eta'} = S\,\eta''\frac{d\Pi}{d\eta'}Dm$, &c; & comme Π eſt une fonction algébrique de $a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$, $a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$, $a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$, il eſt aiſé de voir qu'en faiſant varier ſéparément a, b, c, on aura . . . $\xi'''\frac{d\Pi}{d\xi''} + \eta'''\frac{d\Pi}{d\eta''} + \zeta'''\frac{d\Pi}{d\zeta''} = \frac{b\,d\Pi}{dc}$, $\xi''\frac{d\Pi}{d\eta'''} + \eta''\frac{d\Pi}{d\eta'''} + \zeta''\frac{d\Pi}{d\zeta'''} = c\frac{d\Pi}{db}$; & ainſi de ſuite. De ſorte qu'on aura de cette maniere,

$$\xi'''\frac{dV}{d\xi''} + \eta'''\frac{dV}{d\eta''} + \zeta'''\frac{dV}{d\zeta''} - \xi''\frac{dV}{d\xi'''} - \eta''\frac{dV}{d\eta'''} - \zeta''\frac{dV}{d\zeta'''}$$
$$= S\left(b\frac{d\Pi}{dc} - c\frac{d\Pi}{db}\right)Dm,$$

$$\xi'\frac{dV}{d\xi'''} + \eta'\frac{dV}{d\eta'''} + \zeta'\frac{dV}{d\zeta'''} - \xi'''\frac{dV}{d\xi'} - \eta'''\frac{dV}{d\eta'} - \zeta'''\frac{dV}{d\zeta'}$$
$$= S\left(c\frac{d\Pi}{da} - a\frac{d\Pi}{dc}\right)Dm,$$

$$\xi''\frac{dV}{d\xi'} + \eta''\frac{dV}{d\eta'} + \zeta''\frac{dV}{d\zeta'} - \xi'\frac{dV}{d\xi''} - \eta'\frac{dV}{d\eta''} - \zeta'\frac{dV}{d\zeta''}$$
$$= S\left(a\frac{d\Pi}{db} - b\frac{d\Pi}{da}\right)Dm.$$

Mais ſi cette transformation ſimplifie les formules, elle ne ſimplifie pas le calcul, parce qu'au lieu de l'intégration unique contenue dans V, on en aura trois à exécuter.

39. Lorſque les diſtances des centres des forces au centre du corps ſont très-grandes vis-à-vis des dimenſions de ce corps, on peut alors réduire la quantité Π en une ſérie fort convergente de termes proportionnels aux puiſſances & aux produits de a, b, c; de ſorte que l'intégration $S\,\Pi\,Dm$ n'aura aucune difficulté; c'eſt le cas des Planetes en tant qu'elles s'attirent mutuellement.

Si la force attractive $\overline{P}$ eſt ſimplement proportionnelle à la diſtance $\overline{p}$, enſorte que $\overline{P} = k\overline{p}$, k étant au coëfficient conſtant, le terme $\int \overline{P}\, d\overline{p}$ de la fonction Π (art. 35) devient $= \frac{k\overline{p}^2}{2}$; & comme p eſt exprimé en général par $\sqrt{((x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2)}$, en déſignant par f, g, h, les coordonnées du centre des forces; le terme dont il s'agit donnera ceux-ci, $\frac{k}{2}((x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2)$; donc ſubſtituant par x, y, z leurs valeurs $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$, multipliant par Dm, & intégrant ſelon S, on aura dans la valeur de $V = S\,\Pi\,Dm$ les termes ſuivans,

$$\frac{k}{2}((x'-f)^2+(y'-g)^2+(z'-h)^2)\,S\,Dm$$

$$+k(x'-f)\,S\xi\,Dm+k(y'-g)\,S\eta\,Dm+k(z'-h)\,S\zeta\,Dm$$

$$+\frac{k}{2}\,S(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,Dm.$$

Or $\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$, $\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$, $\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$; donc,

$$S\xi Dm = \xi' SaDm + \xi'' SbDm + \xi''' ScDm;$$

& ainsi des autres ; & $S(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)Dm = S(a^2+b^2+c^2)Dm$, (art. 13) = à une constante que nous désignerons par E.

Mais si on prend pour le centre arbitraire du corps, son centre même de gravité, on a alors

$$SaDm = 0, \quad SbDm = 0, \quad ScDm = 0,$$

comme nous l'avons déja vu ci-dessus (art. 36). Ainsi dans ce cas la quantité V ne contiendra relativement à la force dont il s'agit, qque les termes

$$\frac{k}{2}\left((x'-f)^2+(y'-g)^2+(z'-h)^2\right)+\frac{k}{2}E;$$

de sorte que toutes les différences partielles $\frac{dV}{d\xi'}$, $\frac{dV}{d\xi''}$, &c, seront nulles.

D'où il s'ensuit que l'effet de cette force sera nul par rapport au mouvement de rotation autour du centre de gravité.

Et comme l'expression précédente V, au terme constant $\frac{kE}{2}$ près, est la même que si tout le corps étoit concentré dans son centre, auquel cas $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, on aura pour le mouvement progressif de ce centre, les mêmes équations que si le corps étoit réduit à un point ; car les différences partielles de V, relativement aux variables x', y', z' seront les mêmes que dans cette hypothèse.

Si on veut considérer le corps comme pesant, en prenant la force accélératrice de la gravité pour l'unité, & l'axe des coordonnées z dirigé verticalement de haut en bas, on aura $\bar{P}=1$, & $\bar{p}=h-z$; donc $\int P.dP = h-z = h-z'$

$- a\zeta' - b\zeta'' - c\zeta'''$; de ſorte que la quantiré V contiendra, à raiſon de la peſanteur du corps, les termes

$$(h-\zeta')SDm-\zeta'SaDm-\zeta''SbDm-\zeta'''ScDm.$$

Ainſi ſi le centre du corps eſt pris dans ſon centre de gravité, les termes qui contiennent les variables ζ', ζ'', &c, diſparoîtront, & par conſéquent l'effet de la gravité ſur la rotation ſera nul, comme dans le cas précédent. La valeur de V en tant qu'elle eſt due à la gravité, ſe réduira alors à $(h-\zeta')SDm$, c'eſt-à-dire, à ce qu'elle ſeroit ſi le corps étoit réduit à un point, en conſervant ſa maſſe SDm; donc auſſi le mouvement de tranſlation du corps ſera le même que dans ce cas.

§. III.

Détermination du mouvement d'un corps grave de figure quelconque.

40. Ce problême, quelque difficile qu'il ſoit, eſt néanmoins un des plus ſimples que préſente la Méchanique, quand on conſidere les choſes dans l'état naturel & ſans abſtraction; car tous les corps étant eſſentiellement péſans & étendus, on ne peut les dépouiller de l'une ou de l'autre de ces propriétés ſans les dénaturer, & les queſtions dans leſquelles on ne tiendroit pas compte de toutes les deux à la fois, ne ſeroient par conſéquent que de pure curioſité.

Nous commencerons par examiner le mouvement des corps libres, comme le ſont les projectiles; nous examinerons enſuite celui des corps retenus par un point fixe, comme le ſont les pendules.

Dans le premier cas on prendra le centre du corps dans ſon centre de gravité, & comme alors l'effet de la gravité eſt nul ſur la rotation, ainſi qu'on vient de le voir, on déterminera les loix de cette rotation par les trois équations ſuivantes (art. 38),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} = 0 \\
\frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} = 0 \\
\frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} = 0
\end{aligned}\right\} \dots (A),$$

en ſuppoſant (art. 37).

$$p = \frac{dP}{dt},\ q = \frac{dQ}{dt},\ r = \frac{dR}{dt},\ \&$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hpq.$$

A l'égard du centre même du corps, il ſuivra les loix connues du mouvement des projectiles conſidérés comme des points; ainſi la détermination de ſon mouvement n'a aucune difficulté, & nous ne nous y arrêterons point.

Dans le ſecond cas on prendra le point fixe de ſuſpenſion pour le centre du corps, & ſuppoſant les ordonnées z verticales, & dirigées de bas en haut, on aura (art. 39)

$$V = (h - z')SDm - \zeta' SaDm - \zeta'' SbDm - \zeta''' ScDm;$$

d'où l'on tire $\frac{dV}{d\zeta'} = -SaDm$, $\frac{dV}{d\zeta''} = -SbDm$,

$\frac{dV}{d\zeta'''} = -ScDm$, & toutes les autres différences partielles de V seront nulles. De sorte que les équations pour le mouvement de rotation seront (art. 38),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} - \zeta'''SbDm + \zeta''ScDm = 0\\
&\frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} - \zeta'ScDm + \zeta'''SaDm = 0\\
&\frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr} - \zeta''SaDm + \zeta'SbDm = 0
\end{aligned}\right\} \ldots (B),$$

les quantités $SaDm$, $SbDm$, $ScDm$, devant être regardées comme des constantes données par la figure du corps, & par le lieu du point de suspension.

41. La solution du premier cas, où le corps est supposé entiérement libre, & où l'on ne considere que la rotation autour du centre de gravité, dépend uniquement de l'intégration des trois équations (A).

Or il est d'abord facile de trouver deux intégrales de ces équations;

car 1°, si on les multiplie respectivement par $\frac{dT}{dp}$, $\frac{dT}{dq}$, $\frac{dT}{dr}$, & qu'ensuite on les ajoute ensemble, on a évidemment une équation intégrable, & dont l'intégrale sera

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = f^2,$$

f^2 étant une constante arbitraire.

2°. Si on multiplie les mêmes équations par p, q, r, & qu'on les ajoute ensemble, on aura celle-ci,

$$p\,d.\frac{dT}{dp} + q\,d.\frac{dT}{dp} + r\,d.\frac{dT}{dp} = 0,$$

laquelle (à cause que T est une fonction de p, q, r uniquement, & que par conséquent $dT = \frac{dT}{dp}\,dp + \frac{dT}{dq}\,dq + \frac{dT}{dr}\,dr$ est aussi intégrable, son intégrale étant

$$p\,\frac{dT}{dp} + q\,\frac{dT}{dq} + r\,\frac{dT}{dr} - T = h^n,$$

h^2 étant une nouvelle constante arbitraire.

En mettant dans ces équations, au lieu de T, $\frac{dT}{dp}$, $\frac{dT}{dq}$, $\frac{dT}{dr}$ leurs valeurs, on aura deux équations du second degré entre p, q, r, par lesquelles on pourra déterminer les valeurs de deux de ces variables en fonctions de la troisieme ; & ces valeurs étant ensuite substituées dans une quelconque des trois équations (A), on aura une équation du premier ordre entre t & la variable dont il s'agit ; ainsi on pourra connoître par ce moyen les valeurs de p, q, r en t. C'est ce que nous allons développer.

Je remarque d'abord qu'on peut réduire la seconde des deux intégrales trouvées, à une forme plus simple, en faisant attention que puisque T est une fonction homogène de deux dimensions de p, q, r, on a par la propriété connue de ces sortes de fonctions,

$$p\,\frac{dT}{dp} + \frac{dT}{dq} + r\,\frac{dT}{dr} = 2\,T,$$

ce qui réduit l'équation intégrale dont il s'agit à $T = h^2$; laquelle

laquelle exprime la conservation des forces vives du mouvement de rotation.

Je remarque ensuite que comme la quantité . . .

$$\left(r\frac{dT}{dq}-q\frac{dT}{dr}\right)^2+\left(p\frac{dT}{dr}-r\frac{dT}{dp}\right)^2+\left(q\frac{dT}{dp}-p\frac{dT}{dq}\right)^2$$

est équivalente à celle-ci, $(p^2+q^2+r^2)\times$ . . . .

$$\left(\left(\frac{dT}{dp}\right)^2+\left(\frac{dT}{dq}\right)^2+\left(\frac{dT}{dr}\right)^2\right)-\left(p\frac{dT}{dp}+q\frac{dT}{dq}+r\frac{dT}{dr}\right)^2,$$

laquelle devient $f^2(p^2+q^2+r^2)-4h^4$, en vertu des deux intégrales précédentes, on aura une équation différentielle plus simple, en ajoutant ensemble les carrés des valeurs de $d.\frac{dT}{dp}$, $d.\frac{dT}{dq}$, $d.\frac{dT}{dr}$ dans les trois équations différentielles (A); équation qu'on pourra ainsi employer à la place d'une quelconque de celles-ci.

De cette maniere la détermination des quantités p, q, r, en t dépendra simplement de ces trois équations.

$$T=h^2,$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2+\left(\frac{dT}{dq}\right)^2+\left(\frac{dT}{dr}\right)^2=f^2,$$

$$\left(d.\frac{dT}{dp}\right)^2+\left(d.\frac{dT}{dq}\right)^2+\left(d.\frac{dT}{dr}\right)^2$$
$$=(f^2(p^2+q^2+r^2)-4h^4)dt^2;$$

dans lesquelles

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-Fqr-Gpr-Hpq.$$

42. Cette détermination est assez facile, lorsque les trois constantes F, G, H sont nulles. Car on a alors simplement

$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$; donc $\frac{dT}{dp} = Ap$, $\frac{dT}{dq} = Bq$, $\frac{dT}{dr} = Cr$; de ſorte que les trois équations à réſoudre ſeront de la forme ſuivante,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h^2,$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = f^2,$$

$$\frac{A^2dp^2 + B^2dq^2 + C^2dr^2}{dt^2} = f^2(p^2 + q^2 + r^2) - 4h^4.$$

Si donc on fait $p^2 + q^2 + r^2 = u$, & qu'on tire les valeurs de p, q, r, de ces trois équations,

$$p^2 + q^2 + r^2 = u,$$

$$A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2 = 2h^2,$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = f^2,$$

on aura

$$p^2 = \frac{BCu - 2h^2(B+C) + f^2}{(A-B)(A-C)},$$

$$q^2 = \frac{ACu - 2h^2(A+C) + f^2}{(B-A)(B-C)},$$

$$r^2 = \frac{ABu - 2h^2(A+B) + f^2}{(C-A)(C-B)};$$

ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation différentielle ci-deſſus, le premier membre de cette équation deviendra, après les réductions,

$$\frac{A^2B^2C^2(4h^2 - f^2u^2)\,du^2}{4(BCu - 2h^2(B+C) + f^2)(ACu - 2h^2(A+C) + f^2)(ABu - 2h^2(A+B) + f^2)\,dt^2};$$

& le ſecond membre deviendra $f^2u - 4h^4$, de ſorte qu'en

divisant toute l'équation par $f^2 u - 4h^4$, & tirant la racine carrée, on aura enfin

$$dt = \frac{ABC\,du}{2\sqrt{-(BCu - 2h^2(B+C)+f^2)(ACu-2h^2(A+C)+f^2)(ABu-2h^2(A+B)+f^2)}},$$

d'où l'on tirera par l'intégration t en u, & réciproquement.

43. Supposons maintenant que les constantes F, G, H ne soient pas nulles, & voyons comment on peut ramener ce cas au précédent, au moyen de quelques substitutions.

Pour cela je substitue à la place des variables p, q, r, des fonctions d'autres variables x, y, z, qu'il ne faudra pas confondre avec celles que nous avons employées jusqu'ici pour représenter les coordonnées des différens points du corps; & je suppose d'abord ces fonctions telles, que l'on ait $p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Il est évident que pour satisfaire à cette condition, elles ne peuvent être que linéaires, & par conséquent de cette forme,

$p = p'x + p''y + p'''z$, $q = q'x + q''y + q'''z$, $r = r'x + r''y + r'''z$.

Les quantités p', p'', p''', q', &c, seront des constantes arbitraires, entre lesquelles, en vertu de l'équation $p^2 + q^2$ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, il faudra qu'il y ait les six équations de condition que voici:

$p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1$, $p''^2 + q''^2 + r''^2 = 1$, $p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 = 1$,

$p'p'' + q'q'' + r'r'' = 0$, $p'p''' + q'q''' + r'r''' = 0$, $p''p''' + q''q''' + r''r''' = 0$;

de sorte que comme les quantités dont il s'agit sont au nombre de neuf, après avoir satisfait à ces six équations, il en restera encore trois d'arbitraires.

Je substituerai maintenant ces expressions de p, q, r dans la valeur de T, & je ferai ensorte, au moyen des trois

arbitraires dont je viens de parler, que les trois termes qui contiendroient les produits xy, xz, yz disparoissent de la valeur de T, ensorte que cette quantité se réduise à cette forme, $\frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}$.

Mais pour rendre le calcul plus simple, je substituerai immédiatement dans cette formule les valeurs de x, y, z en p, q, r, & comparant ensuite le résultat avec l'expression de T, je déterminerai non-seulement les arbitraires dont il s'agit, mais aussi les inconnues α, β, γ. Or les valeurs ci-dessus de p, q, r étant multipliées respectivement par p', q', r', par p'', q'', r'', & par p''', q''', r''', ensuite ajoutées ensemble, donnent sur le champ, en vertu des équations de condition entre les coëfficiens p', p'', &c,

$$x = p'p + q'q + r'r, y = p''p + q''q + r''r, z = p'''p + q'''q + r'''r;$$

la substitution de ces valeurs dans la quantité . . . . $\frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}$, & la comparaison avec la valeur de T de l'article 41, donnera ainsi les six équations suivantes,

$$\alpha p'^2 + \beta p''^2 + \gamma p'''^2 = A,$$

$$\alpha q'^2 + \beta q''^2 + \gamma q'''^2 = B,$$

$$\alpha r'^2 + \beta r''^2 + \gamma r'''^2 = C,$$

$$\alpha p'q' + \beta p''q'' + \gamma p'''q''' = -2F,$$

$$\alpha p'r' + \beta p''r'' + \gamma p'''r''' = -2G,$$

$$\alpha q'r' + \beta q''r'' + \gamma q'''r''' = -2H,$$

qui serviront à la détermination des six inconnues dont il s'agit.

Et cette détermination n'a même aucune difficulté ; car ſi on ajoute enſemble la premiere équation multipliée par p', la quatrieme multipliée par q', & la cinquieme multipliée par r', on a, en vertu des équations de condition déja citées,

$$\alpha p' = Ap' - 2Fq' - 2Gr';$$

en ajoutant la ſeconde, la quatrieme, & la ſixieme, multipliées reſpectivement par q', p', r', on aura pareillement

$$\alpha q' = Bq' - 2Fp' - 2Hr';$$

ajoutant enfin la troiſieme, la cinquieme, & la ſixieme, multipliées reſpectivement, r', p', q', on aura

$$\alpha r' = Cr' - 2Gp' - 2Hq';$$

& ces trois équations étant combinées avec l'équation de condition,

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1,$$

ſerviront à déterminer les quatre inconnues α, p', q', r'.

Les deux premieres équations donnent

$$q' = \frac{FG + H(A - \alpha)}{2FH + G(B - \alpha)}\,p',\quad r' = \frac{(A-\alpha)(B-\alpha) - 4F^2}{4FH + 2G(B-\alpha)}\,p';$$

ſubſtituant ces valeurs dans la troiſieme, on aura, après avoir diviſé par p', cette équation en α,

$$(\alpha - A)(\alpha - B)(\alpha - C) - 4H^2(\alpha - A) - 4G^2(\alpha - B)$$
$$- 4F^2(\alpha - C) + 16FGH = 0,$$

laquelle étant du troiſieme degré, aura néceſſairement une racine réelle.

Les mêmes valeurs étant ſubſtituées dans la quatrieme équation, on en tirera celles de p', q', r' en α, leſquelles, en faiſant pour abréger,

$$(\alpha)=\sqrt{\left(\left((A-\alpha)(B-\alpha)-4F^2\right)^2+\left(4FG+2H(A-\alpha)\right)^2+\left(4FH+2G(B-\alpha)\right)^2\right)},$$

ſeront exprimées ainſi,

$$p'=\frac{4FH+2G(B-\alpha)}{(\alpha)},\quad q'=\frac{4FG+2H(A-\alpha)}{(\alpha)},\quad r'=\frac{(A-\alpha)(B-\alpha)-4F^2}{(\alpha)}.$$

Si on fait de nouveau les mêmes combinaiſons des équations ci-deſſus, mais en prenant pour multiplicateurs les quantités p'', q'', r'', à la place de p', q', r', on en tirera ces équations-ci,

$$\beta p''=Ap''-2Fq''-2Gr'',$$

$$\beta q''=Bq''-2Fp''-2Hr'',$$

$$\beta r''=Cr''-2Gp''-2Hq'',$$

qui étant jointes à l'équation de condition $p''^2+q''^2+r''^2=1$, ſerviront à déterminer les quatre inconnues β, p'', q'', r''; & comme ces équations ne diffèrent des précédentes qu'en ce que ces inconnues y ſont à la place des premieres inconnues α, p', q', r', on en conclura ſur le champ que l'équation en β, ainſi que les expreſſions de p'', q'', r'' en β ſeront les mêmes que celles que nous venons de trouver en α.

Enfin ſi on réitere les mêmes opérations, mais en prenant p''', q''', r''' pour multiplicateurs, on trouvera de même les trois équations,

$$\gamma p'''=Ap'''-2Fq'''-2Gr''',$$

$$\gamma q''' = B q''' - 2 F p''' - 2 H r''',$$

$$\gamma r''' = C r''' - 2 G p''' - 2 H q''',$$

auxquelles en joindra l'équation $p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 = 1$; & comme ces équations ſont en tout ſemblables aux précédentes, on en tirera des concluſions analogues.

On concluera donc en général que l'équation en α trouvée ci-deſſus, aura pour racines les valeurs des trois quantités α, β, γ, & que ces trois racines étant ſubſtituées ſucceſſivement dans les expreſſions de p', q', r' en α, on aura tout de ſuite les valeurs de p', q', r', de p'', q'', r'', & de p''', q''', r'''; de ſorte que tout ſera connu moyennant la réſolution de l'équation dont il s'agit.

Au reſte, comme cette équation eſt du troiſieme degré, elle aura toujours une racine réelle, qui étant priſe pour α, rendra auſſi réelles les trois quantités p', q', r'. A l'égard des deux autres racines β & γ, ſi elles étoient imaginaires, elles ſeroient, comme l'on ſait, de la forme $b + c\sqrt{-1}$ & $b - c\sqrt{-1}$; de ſorte que les quantités p'', q'', r'' qui ſont des fonctions rationelles de β, ſeroient auſſi de ces formes, $m + n\sqrt{-1}$, $m' + n'\sqrt{-1}$, $m'' + n''\sqrt{-1}$; & les quantités p''', q''', r''', qui ſont de ſemblables fonctions de p ſeroient des formes réciproques $m - n\sqrt{-1}$, $m' - n'\sqrt{-1}$, $m'' - n''\sqrt{-1}$; donc l'équation de condition $p''p''' + q''q''' + r''r''' = 0$, deviendroit $m^2 + n^2 + m'^2 + n'^2 + m''^2 + n''^2 = 0$, & par conſéquent impoſſible tant que m, n, m', n', m'', n'' ſeroient réelles; d'où il s'enſuit que β & γ ne peuvent être imaginaires.

Pour ſe convaincre directement de cette vérité, d'après l'équation même dont il s'agit, je mets cette équation ſous la forme

$$\alpha - C = \frac{4H^2(\alpha - A) + 4G^2(\alpha - B) - 16FGH}{(\alpha - A)(\alpha - B) - 4F^2};$$

j'y ſubſtitue ſucceſſivement, au lieu de α, les deux autres racines β & γ, & je retranche les deux équations résultantes l'une de l'autre; j'aurai, après les réductions & la diviſion par $\beta - \gamma$, cette transformée

$$((\beta - A)(\beta - B) - 4F^2)((\gamma - A)(\gamma - B) - 4F^2) +$$
$$4(G^2 + H^2)\beta\gamma - 4(4FGH + H^2A + G^2B)(\beta + \gamma)$$
$$+ 16F^2(G^2 + H^2) + 16(A + B)FGH + 4(AH^2 + BG^2) = 0,$$

laquelle eſt réductible à cette forme,

$$((\beta - A)(\beta - B) - 4F^2)((\gamma - A)(\gamma - B) - 4F^2)$$
$$+ 4(H(\beta - A) - 2FG)(H(\gamma - A) - 2FG)$$
$$+ 4(G(\beta - A) - 2FH)(G(\gamma - A) - 2FH) = 0,$$

qu'on voit être la même choſe que l'équation $p''p''' + q''q''' + r''r^{IV} = 0$, & qui fournit par conſéquent des concluſions ſemblables.

Donc les trois racines α, β, γ ſeront néceſſairement toutes réelles, & les neuf coëfficiens p', q', r', p'', &c, qui ſont des fonctions rationelles de ces racines, ſeront réels auſſi.

44. Nous venons de déterminer les valeurs de ces coëfficiens, enſorte que l'on ait $p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, & $T = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}$; or en faiſant varier ſucceſſivement p, q, r, on aura, à cauſe que x, y, z ſont fonctions de ces variables,

$\frac{dT}{dp}$

$$\frac{dT}{dp} = \alpha x \frac{dx}{dp} + \beta y \frac{dy}{dp} + \gamma z \frac{dz}{dp},$$

$$\frac{dT}{dq} = \alpha x \frac{dx}{dq} + \beta y \frac{dy}{dq} + \gamma z \frac{dz}{dq},$$

$$\frac{dT}{dr} = \alpha x \frac{dx}{dr} + \beta y \frac{dy}{dr} + \gamma z \frac{dz}{dr},$$

mais $x = p'p + q'q + r'r$, $y = p''p + q''q + r''r$, $z = p'''p + q'''q + r'''r$, comme on l'a déja vu plus haut; donc $\frac{dx}{dp} = p'$, $\frac{dx}{dq} = q'$, $\frac{dx}{dr} = r'$, $\frac{dy}{dp} = p''$, $\frac{dy}{dq} = q''$, &c; ſubſtituant ces valeurs, on aura donc

$$\frac{dT}{dp} = p'\alpha x + p''\beta y + p'''\gamma z,$$

$$\frac{dT}{dq} = q'\alpha x + q''\beta y + q'''\gamma z,$$

$$\frac{dT}{dr} = r'\alpha x + r''\beta y + r'''\gamma z.$$

De ſorte qu'en vertu des équations de condition entre les coëfficiens p', q', r', p'', &c, on aura

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2, \text{ \&}$$

$$\left(d.\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dr}\right)^2 = \alpha^2 dx^2 + \beta^2 dy^2 + \gamma^2 dz^2,$$

Par conſéquent les trois équations finales de l'article 41 ſe réduiront à celles-ci

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 2h^2,$$

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = f^2,$$

$$\frac{\alpha^2 dx^2 + \beta^2 dy^2 + \gamma^2 dz^2}{dt^2} = f^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4h^4,$$

lesquelles sont, comme l'on voit, tout-à-fait semblables à celles de l'article 42, les quantités x, y, z, α, β, γ répondant aux quantités p, q, r, A, B, C.

D'où il suit que si on fait, comme dans l'article cité,

$$u = p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

on aura entre les variables x, y, z, u, t, les mêmes formules que l'on avoit trouvées entre p, q, r, u, t, en changeant seulement A, B, C, en α, β, γ.

Ayant ainsi les valeurs de x, y, z en u ou t, on aura les valeurs complettes de p, q, r par les formules de l'article 43.

45. Les quantités p, q, r ne suffisent pas pour déterminer toutes les circonstances du mouvement de rotation du corps, elles ne servent qu'à faire connoître sa rotation instantanée. En effet, puisque $p = \frac{dP}{dt}$, $q = \frac{dQ}{dt}$, $r = \frac{dR}{dt}$, il s'ensuit de ce qu'on a vu dans l'article 26 que l'axe spontanée de rotation, autour duquel le corps tourne à chaque instant, fera avec les axes des coordonnées a, b, c, des angles dont les cosinus seront respectivement $\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$, $\frac{r}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$, & que la vîtesse angulaire autour de cet axe sera représentée par $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$.

Pour la connoissance complette de la rotation du corps, il faut encore déterminer les valeurs des neuf quantités ξ', η', ζ', ξ'', &c, d'où dépendent celles des coordonnées ξ, η, ζ, lesquelles donnent la position absolue de chaque point du corps dans l'espace relativement au centre de gravité regardé comme immobile (art. 34); c'est ce qui demande encore trois intégrations nouvelles.

Pour cet effet je reprends les formules différentielles de l'article 27, & mettant $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, au lieu de dP, dQ, dR, j'ai ces équations,

$$\left.\begin{aligned} d\xi' + (q\xi''' - r\xi'')\,dt &= 0 \\ d\xi'' + (r\xi' - p\xi''')\,dt &= 0 \\ d\xi''' + (p\xi'' - q\xi')\,dt &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

& autant d'équations semblables en η', η'', η''', & en ζ', ζ'', ζ''', en changeant seulement ξ en η & en ζ.

Ces équations étant comparées avec les équations différentielles (A) de l'article 40, entre les quantités $\frac{dT}{dp}$, $\frac{dT}{dq}$, $\frac{dT}{dr}$, il est visible qu'elles sont entiérement semblables, de sorte que ces quantités répondent aux quantités ξ', ξ'', ξ''', comme aussi aux quantités η', η'', η''', & aux quantités ζ', ζ'', ζ'''.

D'où je conclus que ces dernieres variables peuvent être regardées comme des valeurs particulieres des variables $\frac{dT}{dp}$, $\frac{dT}{dq}$, $\frac{dT}{dr}$; & qu'ainsi, puisque les équations entre ces variables sont simplement linéaires, on aura, en prenant trois constantes quelconques l, m, n, ces trois équations intégrales complettes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{dp} &= l\xi' + m\eta' + n\zeta', \\ \frac{dT}{dq} &= l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'', \\ \frac{dT}{dr} &= l\xi''' + m\eta''' + n\zeta''', \end{aligned}\right\} \ldots (D)$$

or en combinant ces trois équations avec les ſix équations de condition entre les mêmes variables ξ', η', &c, il ſemble qu'on pourroit déterminer ces variables, qui ſont en tout au nombre de neuf; mais en conſidérant de plus près les équations précédentes, il eſt facile de ſe convaincre qu'elles ne peuvent réellement tenir lieu que de deux équations; car en ajoutant enſemble leurs carrés, il arrive que toutes les inconnues ξ', η', ξ'', &c, diſparoiſſent à la fois en vertu des mêmes équations de condition (art. 15); de ſorte que l'on aura ſimplement l'équation

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = l^2 + m^2 + n^2,$$

laquelle revient, comme l'on voit, à la premiere des deux intégrales trouvées plus haut (art. 41); & la comparaiſon de ces équations donnent $f^2 = l^2 + m^2 + n^2$, enſorte que parmi les quatre conſtantes f, l, m, n, il n'y en a que trois d'arbitraires.

D'où l'on doit conclure que la ſolution complette demande encore une nouvelle intégration, à laquelle il faudra employer une quelconque des équations différentielles ci-deſſus, ou une combinaiſon quelconque de ces mêmes équations.

46. Mais on peut rendre le calcul beaucoup plus général & plus ſimple, en cherchant directement les valeurs des coordonnées mêmes ξ, η, ζ, qui déterminent immédiatement la poſition abſolue d'un point quelconque du corps, pour lequel les coordonnées relatives aux axes du corps, ſont a, b, c.

Pour cela, j'ajoute enſemble les trois équations intégrales

(D) trouvées ci-dessus, après avoir multiplié la premiere par a, la seconde par b, la troisieme par c; ce qui donne (art. 12), cette équation,

$$l\xi + m\eta + n\zeta = a\frac{dT}{dp} + b\frac{dT}{dq} + c\frac{dT}{dr}.$$

Or on a déja par la nature des quantités ξ, η, ζ, (art. 13).

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Enfin on a aussi (art. 28) en mettant $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ au lieu de dP, dQ, dR, & faisant a, b, c constans,

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} = (cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2.$$

Ainsi voilà trois équations d'où l'on pourra tirer les valeurs de ξ, η, ζ, moyennant une seule intégration.

Ensuite si on vouloit connoître séparément les valeurs de ξ', η', ζ', ξ'', &c, il n'y auroit qu'à supposer dans les expressions générales de ξ, η, ζ, les constantes $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, ou $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, ou $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$.

Supposons pour abréger

$$L = a\frac{dT}{dp} + b\frac{dT}{dq} + c\frac{dT}{dr},$$

$$M = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$N = (cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2;$$

on aura donc à résoudre ces trois équations,

$$l\xi + m\eta + n\zeta = L,$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = M,$$

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} = N,$$

dans lesquelles M est une constante donnée, L, N, sont supposées connues en fonctions de t, & l, m, n sont des constantes arbitraires.

J'observe d'abord que si l, & m étoient nulles à la fois, la premiere équation donneroit $\zeta = \frac{L}{n}$; & cette valeur étant substituée dans les deux autres, on auroit

$$\xi^2 + \eta^2 = M - \frac{L}{n^2}, \quad \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dt^2} = N - \frac{dL^2}{n^2\,dt^2};$$

équations très-faciles à intégrer, en faisant $\xi = \rho \cos\theta$, $\eta = \rho \sin\theta$, ce qui les change en ces deux-ci,

$$\rho^2 = M - \frac{L}{n^2}, \quad \frac{\rho\,d\theta^2 + d\rho^2}{dt^2} = N - \frac{dL^2}{n^2\,dt^2},$$

dont la premiere donnera la valeur de ρ, & dont la seconde donnera l'angle θ par l'intégration de cette formule

$$d\theta = \frac{dt}{\rho}\sqrt{N - \frac{dL^2}{n^2\,dt^2} - \frac{d\rho^2}{dt^2}}.$$

Supposons maintenant que l, & m ne soient pas nulles, & voyons comment on peut réduire ce cas au précédent. Il est clair que si on fait $l\xi + m\eta = x\sqrt{l^2 + m^2}$, $m\xi - l\eta = y\sqrt{l^2 + m^2}$, on aura également . . . , $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$, & $d\xi^2 + d\eta^2 = dx^2 + dy^2$; ainsi les équations proposées se réduiront d'abord à cette forme,

$$x\sqrt{l^2 + m^2} + n\zeta = \mathrm{L},$$

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = M,$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + d\zeta^2}{dt^2} = N.$$

Si on fait ensuite

$$x\sqrt{l^2+m^2}+n\zeta, = z\sqrt{l^2+m^2+n^2},$$

$$nx-\zeta\sqrt{l^2+m^2} = u\sqrt{l^2+m^2+n^2},$$

on aura encore $x^2+\zeta^2 = z^2+u^2$, & $dx^2+d\zeta^2 = dz^2+du^2$; donc on aura ces transformées,

$$z\sqrt{l^2+m^2+n^2} = L,$$

$$u^2+y^2+z^2 = M,$$

$$\frac{du^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = N,$$

qui sont, comme l'on voit, entiérement semblables à celles que nous venons de résoudre ci-dessus; ensorte qu'on aura pour u, y, z, les mêmes expressions que nous avons trouvées pour ξ, η, ζ, en y changeant seulement n en . . $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$.

Ces valeurs étant connues, on aura les valeurs générales de ξ, η, ζ, par les formules

$$\xi = \frac{lx+my}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad \eta = \frac{mx-ly}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad \zeta = \frac{nu+z\sqrt{l^2+m^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

47. Telle est, si je ne me trompe, la solution la plus générale, & en même tems la plus simple qu'on puisse donner du fameux problême du mouvement de rotation des corps libres; elle est analogue à celle que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1773, mais elle est en même-tems plus directe & plus simple à quelques

égards. Dans celle-là je ſuis parti de trois équations intégrales qui répondent aux équations (D) de l'article 45 ci-deſſus, équations qui m'avoient été fournies directement par le principe connu des aires & des momens, & auxquelles j'avois joint l'équation des forces vives $T = h^2$ (art. 41). Ici j'ai déduit toute la ſolution des trois équations différentielles primitives, & je crois avoir mis dans cette ſolution, toute la clarté, & (ſi j'oſe le dire) toute l'élégance dont elle eſt ſuſceptible; par cette raiſon je me flatte qu'on ne me déſapprouvera pas d'avoir traité de nouveau ce problême, quoiqu'il ne ſoit gueres que de pure curioſité, ſur-tout, ſi comme je n'en doute pas, il peut être de quelque utilité à l'avancement de l'analyſe.

Ce qu'il y a, ce me ſemble, de plus remarquable dans la ſolution précédente, c'eſt l'emploi qu'on y fait des quantités ξ', ν', ζ', ξ'', &c, ſans connoître leurs valeurs, mais ſeulement les équations de condition auxquelles elles ſont ſoumiſes, quantités qui diſparoiſſent à la fin tout-à-fait du calcul; je ne doute pas que ce genre d'analyſe ne puiſſe auſſi être utile dans d'autres occaſions.

Au reſte, ſi cette ſolution eſt un peu longue, on ne doit l'imputer qu'à la grande généralité qu'on y a voulu conſerver; & l'on a pu remarquer deux moyens de la ſimplifier, l'un en ſuppoſant les conſtantes F, G, H nulles (art. 42), & l'autre en faiſant nulles les conſtantes l & m (art. 46).

La premiere de ces deux ſuppoſitions avoit toujours été regardée comme indiſpenſable pour parvenir à une ſolution complette du problême, juſqu'à ce que je donnai dans mon Mémoire de 1773 la maniere de s'en paſſer; cette ſuppoſition

tion consiste, en effet, à prendre pour les axes des coordonnées a, b, c, des droites, telles que les sommes $S\,ab\,Dm$, $S\,ac\,Dm$, $S\,bc\,Dm$ soient nulles (art. 36); & M. Euler a démontré le premier que cela est toujours possible, quelle que soit la figure du corps, & que les axes ainsi déterminés, sont des axes de rotation naturels, c'est-à-dire, tels que le corps peut tourner librement autour de chacun d'eux. Mais quoiqu'on puisse toujours trouver des axes qui aient la propriété dont il s'agit, & que d'ailleurs la position des axes du corps soit arbitraire, il n'est pas indifférent d'avoir une solution tout-à-fait directe & indépendante de ces considérations particulieres.

La seconde des deux suppositions dont il s'agit, dépend de la position des axes des coordonnées ξ, η, ζ, dans l'espace, position qui étant pareillement arbitraire, peut toujours être supposée telle que les constantes l & m deviennent nulles, comme on peut s'en convaincre directement d'après les expressions générales de ξ, η, ζ que nous avons trouvées.

48. En supposant F, G, H nulles, on a, comme on l'a vu dans l'article 42,

$$\frac{dT}{dp} = Ap,\ \frac{dT}{dq} = Bq,\ \frac{dT}{dr} = Cr,$$

& ces valeurs étant substituées dans les trois équations différentielles (A), il vient celles-ci,

$$dp + \frac{C-B}{A}\,qr\,dt = 0,\ dq + \frac{A-C}{B}\,pr\,dt = 0,\ dr + \frac{B-A}{C}\,pq\,dt = 0;$$

lesquelles s'accordent avec celles que M. Euler a employées dans la solution qu'il a donnée le premier de ce problême

(voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1758); pour s'en convaincre, il ſuffira d'obſerver que les conſtantes A, B, C (art. 36), ne ſont autre choſe que ce que M. Euler nomme les *momens d'inertie* du corps autour des axes des coordonnées a, b, c, & que les variables p, q, r dépendent du mouvement inſtantané & ſpontanée de rotation, de maniere que ſi on nomme α, β, γ, les angles que l'axe autour duquel le corps tourne ſpontanément à chaque inſtant, fait avec les axes des a, b, c, & ρ la vîteſſe angulaire de rotation autour de cet axe, on a (art. 45),

$$p = \rho \operatorname{cof} \alpha,\ q = \rho \operatorname{cof} \beta,\ r = \rho \operatorname{cof} \gamma.$$

A l'égard des autres équations de M. Euler, leſquelles ſervent à déterminer la poſition des axes du corps dans l'eſpace, elles ſe rapportent à nos équations (C) de l'article 45. En effet, comme les neuf quantités ξ', η', ζ', ξ'', &c, ne ſont autre choſe que les coordonnées rectangles des trois points du corps pris dans ſes trois axes à la diſtance 1 du centre (ce qui ſuit évidemment de ce que ces quantités réſultent des trois ξ, η, ζ, en y faiſant ſucceſſivement $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, enſuite $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, & enfin $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$), il eſt clair que ſi on déſigne, avec M. Euler, par l, m, n les complémens des angles d'inclinaiſon de ces axes ſur le plan fixe des ξ & η, & par λ, μ, ν, les angles que les projections des mêmes axes font avec l'axe fixe des ξ, on aura ces expreſſions,

$$\zeta' = \operatorname{cof} l,\ \eta' = \operatorname{fin} l \operatorname{fin} \lambda,\ \xi' = \operatorname{fin} l \operatorname{cof} \lambda,$$

$$\zeta'' = \operatorname{cof} m,\ \eta'' = \operatorname{fin} m \operatorname{fin} \mu,\ \xi'' = \operatorname{fin} m \operatorname{cof} \mu,$$

$$\zeta''' = \operatorname{cof} n,\ \eta''' = \operatorname{fin} n \operatorname{fin} \nu,\ \xi''' = \operatorname{fin} n \operatorname{cof} \nu;$$

& par le moyen de ces ſubſtitutions, on trouvera aiſément les équations auxquelles M. Euler eſt parvenu par des conſidérations géométriques & trigonométriques.

49. Au reſte, en adoptant à la fois les deux ſuppoſitions de F, G, H nulles, & de l, m, nulles auſſi, on aura la ſolution la plus ſimple par les trois équations (D) de l'article 45, en y ſubſtituant les valeurs de ζ', ζ'', ζ''' & de p, q, r en φ, ψ, ω (art, 30, 37). Car on aura de cette maniere ces trois équations du premier ordre,

$$A\,\frac{\text{ſin}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega\,d\psi + \text{coſ}\,\varphi\,d\omega}{dt} = n\,\text{ſin}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega,$$

$$B\,\frac{\text{coſ}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega\,d\psi - \text{ſin}\,\varphi\,d\omega}{dt} = n\,\text{coſ}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega,$$

$$C\,\frac{d\varphi + \text{coſ}\,\omega\,d\psi}{dt} = n\,\text{coſ}\,\omega;$$

leſquelles ſe réduiſent évidemment à celles-ci,

$$n\,dt - A\,d\psi = \frac{A\,d\omega}{\text{tang}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega},$$

$$n\,dt - B\,d\psi = -\frac{B\,\text{tang}\,\varphi\,d\omega}{\text{ſin}\,\omega},$$

$$n\,dt - C\,d\psi = \frac{C\,d\varphi}{\text{coſ}\,\omega}.$$

Or ſi on élimine dt & $d\psi$, en ajoutant enſemble ces trois équations, après les avoir multipliées reſpectivement par $C - B$, $A - C$, $B - A$, on aura l'équation

$$A(C-B)\frac{d\omega}{\text{tang}\,\varphi\,\text{ſin}\,\omega} - B(A-C)\frac{\text{tang}\,\varphi\,d\omega}{\text{ſin}\,\omega} + C(B-A)\frac{d\varphi}{\text{coſ}\,\omega} = 0,$$

laquelle ſe réduit à cette forme,

$$\frac{\operatorname{cof} d\omega}{\operatorname{fin}\omega} = \frac{C(B-A)d\varphi}{B(A-C)\operatorname{tang}\varphi - \frac{A(C-B)}{\operatorname{tang}\varphi}},$$

où les variables ſont ſéparées.

Le ſecond membre de cette équation,

ſe change en $\frac{C(B-A)\operatorname{fin}\varphi \operatorname{cof}\varphi d\varphi}{B(A-C)\operatorname{fin}\varphi^2 - A(C-B)\operatorname{cof}\varphi^2}$,

ou encore en $\frac{C(B-A)\operatorname{fin} 2\varphi d\varphi}{2AB - C(A+B) + C(A-A)\operatorname{cof} 2\varphi}$;

donc, en intégrant logarithmiquement, & paſſant enſuite des logarithmes aux nombres, on aura

$$2AB - C(A+B) + C(B-A)\operatorname{cof} 2\varphi = \frac{K}{\operatorname{fin}\omega^2},$$

K étant une conſtante arbitraire; . . . .

or $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{cof} 2\varphi}{1+\operatorname{cof} 2\varphi}\right)}$; donc ſubſtituant la valeur précédente, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\left(\frac{2A(B-C)\operatorname{fin}\omega^2 - K}{2B(C-A)\operatorname{fin}\omega^2 + K}\right)};$$

& mettant cette valeur de $\operatorname{tang}\varphi$ dans les deux premieres équations différentielles, on aura

$$n\,dt - A\,d\psi = \frac{A\,d\omega}{\operatorname{fin}\omega}\sqrt{\left(\frac{2B(C-A)\operatorname{fin}\omega^2 + K}{2A(B-C)\operatorname{fin}\omega^2 - K}\right)},$$

$$n\,dt - B\,d\psi = -\frac{B\,d\omega}{\operatorname{fin}\omega}\sqrt{\left(\frac{2A(B-C)\operatorname{fin}\omega^2 - K}{2B(C-A)\operatorname{fin}\omega^2 + K}\right)},$$

équations, où les indéterminées ſont ſéparées, & qui étant intégrées, donneront t & ψ en fonctions de ω.

Cette ſolution revient à celle que M. d'Alembert a donnée dans le tome quatrieme de ſes Opuſcules.

50. Venons au second cas où l'on suppose le corps grave suspendu par un point fixe, autour duquel il peut tourner librement en tout sens. En prenant ce point pour le centre du corps, c'est-à-dire, pour l'origine commune des coordonnées ξ, η, ζ & a, b, c, & supposant les ordonnées ζ verticales, & dirigées de haut en bas, on aura pour le mouvement de rotation du corps, les équations (B) de l'article 40. Ces équations sont plus compliquées que celles du cas précédent, à raison des termes multipliés par les quantités $SaDm$, $SbDm$, $ScDm$, lesquelles ne sont plus nulles, lorsque le centre du corps dont la position est ici donnée, tombe hors de son centre de gravité; on peut néanmoins encore faire évanouir deux de ces quantités, en faisant passer par le centre de gravité l'un des axes des coordonnées a, b, c, dont la position dans le corps est arbitraire; ce qui simplifiera un peu les équations dont il s'agit.

Supposons donc que l'axe des coordonnées c passe par le centre de gravité du corps; on aura alors par les propriétés de ce centre, $SaDm = 0$, $SbDm = 0$, & si on nomme k la distance entre le centre du corps, qui est le point de suspension, & son centre de gravité, il est visible qu'on aura aussi $S(k - c)Dm = 0$; donc $ScDm = SkDm = kDm = km$, en nommant m la masse du corps.

Faisant ces substitutions, & mettant K pour km, on aura les trois équations suivantes,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} + K\zeta'' = 0\\
&\frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} - K\zeta' = 0\\
&\frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} = 0,
\end{aligned}\right\}(E)\ldots\ldots$$

dans lesquelles

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hpq.$$

51. On peut d'abord trouver deux intégrales de ces équations en les ajoutant ensemble, après les avoir multipliées respectivement par p, q, r, ou par ζ', ζ'', ζ'''; car à cause de $d\zeta' = (\zeta'' r - \zeta''' q)\,dt$, $d\zeta'' = (\zeta''' p - \zeta' r)\,dt$, $d\zeta''' = (\zeta' q - \zeta'' p)\,dt$, (art. 27), on aura ainsi les deux équations

$$p\,d.\frac{dT}{dp} + q\,d.\frac{dT}{dq} + r\,d.\frac{dT}{dr} - K\,d\zeta''' = 0,$$

$$\zeta' d.\frac{dT}{dp} + \zeta'' d.\frac{dT}{dq} + \zeta''' d.\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dp}d\zeta' + \frac{dT}{dq}d\zeta'' + \frac{dT}{dr}d\zeta''' = 0,$$

dont les intégrales sont

$$p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} - T - K\zeta''' = f,$$

$$\zeta'\frac{dT}{dp} + \zeta''\frac{dT}{dq} + \zeta''\frac{dT}{dr} = h.$$

f & h étant deux constantes arbitraires.

Il paroît difficile de trouver d'autres intégrales, & par conséquent de résoudre le problême en général. Mais on y

peut parvenir, en ſuppoſant que la figure du corps ſoit aſſujettie à des conditions particulieres.

Ainſi en ſuppoſant $F=0$, $G=0$, $H=0$, & de plus $A=B$, on aura $\frac{dT}{dp}=Ap$, $\frac{dT}{dq}=Aq$, & la troiſieme des équations (E) deviendra $d.\frac{dT}{dr}=0$, dont l'intégrale eſt $\frac{dT}{dr}=$ *conſt.*

Ce cas eſt celui où l'axe des ordonnées c, c'eſt-à-dire, la droite qui paſſe par le point de ſuſpenſion, & par le centre de gravité, eſt un axe naturel de rotation, & où les *momens d'inertie* autour des deux autres axes ſont égaux (art. 48); ce qui a lieu en général dans tous les ſolides de révolution, lorſque le point fixe eſt pris dans l'axe de révolution. La ſolution de ce cas eſt facile, d'après les trois intégrales qu'on vient de trouver.

En effet, puiſque $T=\frac{A(p^2+q^2)}{2}+\frac{Cr^2}{2}$, il eſt viſible que ces trois intégrales ſe réduiront à cette forme

$$A(p^2+q^2)+Cr^2-2K\zeta'''=2f,$$

$$A(\zeta'p+\zeta''q)+C\zeta'''r=h,$$

$$r=n,$$

f, h, n étant des conſtantes arbitraires.

Donc ſi on ſubſtitue pour ζ', ζ'', ζ''', & pour p, q, r leurs valeurs en fonctions de φ, ψ, ω, (art. 30, 37), on aura ces trois équations,

$$A\frac{\sin\omega^2\,d\psi^2+d\omega^2}{dt^2}+Cn^2-2K\cos\omega=2f,$$

$$A\frac{\sin\omega^2\,d\psi}{dt}+Cn\cos\omega=h,$$

$$\frac{d\varphi+\cos\omega\,d\psi}{dt}=n,$$

lesquelles ont, comme l'on voit, l'avantage que les angles finis ψ & φ ne s'y trouvent pas.

La seconde donne d'abord

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{h-Cn\cos\omega}{A\sin\omega^2},$$

& cette valeur étant substituée dans la premiere, on aura

$$dt=\frac{A\sin\omega\,d\omega}{\sqrt{(A\sin\omega^2(2f-Cn^2+2K\cos\omega)-(h-Cn\cos\omega)^2)}};$$

ensuite la seconde & la troisieme donneront

$$d\psi=\frac{(h-Cn\cos\omega)\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{(A\sin\omega^2(2f-Cn^2+2K\cos\omega)-(h-Cn\cos\omega)^2)}},$$

$$d\varphi=\frac{(An-h\cos\omega+(C-An\cos\omega^2)\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{(A\sin\omega^2(2f-Cn^2+2K\cos\omega)-(h-(n\cos\omega)^2)}};$$

équations où les indéterminées sont séparées, mais dont l'intégration dépend en général de la rectification des sections coniques.

52. Reprenons les équations (E), & substituons-y les valeurs de $\frac{dT}{dp}$, $\frac{dT}{dq}$, $\frac{dT}{dr}$ en p, q, r, elles deviendront

$$\frac{Adp-Gdr-Hdq}{dt}+(C-B)qr+F(r^2-q^2)-Gpq+Hpr+K\zeta'=0,$$

$$\frac{Bdq-Fdr-Hdp}{dt}+(A-C)pr+G(p^2-r^2)-Hqr+Fpq-K\zeta'=0,$$

$$\frac{Cdr-Fdq-Gdp}{dt}+(B-A)pq+H(q^2-p^2)-Fpr+Gqr=0.$$

Dans

Dans l'état de repos du corps les trois quantités p, q, r, ſont nulles, puiſque $\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ eſt la vîteſſe inſtantanée de rotation (art. 45); donc on aura alors $\zeta'=0$, & $\zeta''=0$; enſorte qu'à cauſe de $\zeta'^2+\zeta''^2+\zeta'''^2=1$, & par conſéquent de $\zeta'''=1$, l'axe des coordonnées ζ coïncidera avec celui des ordonnées c; c'eſt-à-dire, que ce dernier axe qui paſſe par le centre de gravité du corps, & que nous nommerons dorénavant *l'axe du corps*, ſera vertical; ce qui eſt l'état d'équilibre du corps; & cela ſe voit encore mieux par les formules de l'article 30, leſquelles donnent $\sin\varphi \sin\omega=0$, $\cos\varphi\sin\omega=0$, & par conſéquent $\omega=0$, ω étant l'angle des deux axes des coordonnées c & ζ.

Si donc en ſuppoſant le corps en mouvement, on ſuppoſe en même-tems que ſon axe s'éloigne très-peu de la verticale, enſorte que l'angle de déviation ω demeure toujours très-petit, alors les quantités ζ' & ζ'' ſeront très-petites, & l'on aura le cas où le corps ne fait que de très-petites oſcillations autour de la verticale, en ayant en même-tems un mouvement quelconque de rotation autour de ſon axe.

Ce cas qui n'a pas encore été réſolu peut l'être facilement & complettement par nos formules. Car en regardant ζ' & ζ'' comme très-petites du premier ordre, & négligeant les quantités très-petites du ſecond ordre & des ordres ſuivans, on trouve, par les équations de condition de l'article 15, $\zeta'''=1$, $\xi'''=-\xi'\zeta'-\xi''\zeta''$, $\eta'''=-\eta'\zeta'-\eta''\zeta''$, & $\xi'^2+\xi''^2=1$, $\eta'^2+\eta''^2=1$, $\xi'\eta'+\xi''\eta''=0$; donc $\xi'=\sin\pi$, $\xi''=\cos\pi$, $\eta'=\sin\theta$, $\eta''=\cos\theta$, & $\cos(\pi-\theta)=0$; d'où $\pi=90°+\theta$, & par conſéquent $\xi'=\cos\theta$, $\xi''=-\sin\theta$. Subſtituant ces valeurs dans les expreſſions de dP, dQ, dR de l'article 23, on aura $dP,=\xi'd\theta+d\zeta''$, $dQ=\zeta''d\theta-d\zeta'$,

$dR = d\theta$, en négligeant toujours les quantités du ſecond ordre.

Ainſi donc on aura

$$p = \frac{dP}{dt} = \frac{\zeta' d\theta + d\zeta''}{dt},$$

$$q = \frac{dQ}{dt} = \frac{\zeta'' d\theta - d\zeta'}{dt},$$

$$r = \frac{dR}{dt} = \frac{d\theta}{dt},$$

valeurs qui étant ſubſtituées dans les équations différentielles ci-deſſus, donneront, en négligeant les puiſſances & les produits de ζ' & ζ'' des équations linéaires pour la détermination de ces variables.

Mais avant de faire ces ſubſtitutions, on remarquera qu'en ſuppoſant ζ' & ζ'' nuls, les équations dont il s'agit, donnent

$$-G\frac{d^2\theta}{dt^2} + F\frac{d\theta^2}{dt^2} = 0, \quad -F\frac{d^2\theta}{dt^2} - G\frac{d\theta^2}{dt^2} = 0,$$

$$C\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

Donc puiſque C ne ſauroit devenir nul, à moins que le corps ne ſe réduiſe à une ligne phyſique, C étant . . . $= S(a^2 + b^2)Dm$, il s'enſuit qu'on ne peut ſatisfaire à ces équations qu'en faiſant $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, & enſuite ou $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ou $F = 0$ & $G = 0$.

De là il eſt facile de conclure que lorſque ζ' & ζ'' ne ſont pas nuls, mais ſeulement très-petits, il faudra que les valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$, ou de F & G ſoient auſſi très-petites; ce

qui fait deux cas qui demandent à être examinés séparément.

53. Supposons premiérement que $\frac{d\theta}{dt}$ soit une quantité très-petite du même ordre que ζ' & ζ'', on aura, aux quantités du second ordre près, $p = \frac{d\zeta''}{bt}$, $q = -\frac{d\zeta'}{dt}$.

Par ces substitutions, en négligeant toujours les quantités du second ordre, & changeant pour plus de simplicité les lettres ζ', ζ'' en s, u, les équations différentielles de l'article précédent, deviendront

$$\frac{A d^2 u - G d^2 \theta + H d^2 s}{dt^2} + K u = 0,$$

$$\frac{-B d^2 s - F d^2 \theta - H d^2 u}{dt^2} - K s = 0,$$

$$\frac{C d^2 \theta - F d^2 s - G d^2 u}{dt^2} = 0.$$

La derniere donne $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{F d^2 s + G d^2 u}{C dt^2}$; & cette valeur étant substituée dans les deux premieres, on aura ces deux-ci,

$$\frac{(AC - G^2) d^2 u + (CH - GF) d^2 s}{dt^2} + C K u = 0,$$

$$\frac{(BC + F^2) d^2 s + (CH + GF) d^2 u}{dt^2} + C K s = 0,$$

dont l'intégration est facile par les méthodes connues.

Qu'on suppose pour cela

$$s = \alpha \sin(\rho t + \beta), \quad u = \gamma \sin(\rho t + \beta),$$

α, β, γ, ρ étant des conſtantes indéterminées; on aura, après ces ſubſtitutions, ces deux équations de condition,

$$(AC - G^2)\rho^2 + (CH - GF)\alpha\rho^2 - CK\gamma = 0,$$

$$(BC + F^2)\alpha\rho^2 + (CH + GF)\gamma\rho^2 - AR\alpha = 0,$$

leſquelles donnent

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{(CH - GF)\rho^2}{CK - (AC - G^2)\rho^2} = \frac{CK - (BC + F^2)\rho^2}{(CH + GF)\rho^2};$$

d'où réſulte cette équation en ρ.

$$\frac{C^2K^2}{\rho^4} - ((A + B)C + F^2 - G^2)\frac{CK}{\rho^2} +$$
$$(AB - H^2)C^2 + (AF^2 - BG^2)C = 0,$$

laquelle aura, comme l'on voit, quatre racines égales deux à deux, & de ſigne contraire.

Si donc on déſigne en général par ρ & ρ' les racines inégales de cette équation, abſtraction faite de leur ſigne, & qu'on prenne quatre conſtantes arbitraires α, α', β, β', on aura en général

$$s = \alpha \sin(\rho t + \beta) + \alpha' \sin(\rho' t + \beta'),$$

& par conſéquent

$$u = \frac{(CH - GF)\rho^2 \alpha \sin(\rho t + \beta)}{CK - AC - G^2)\rho^2}$$
$$+ \frac{(CH - GF)\rho'^2 \alpha' \sin(\rho' t + \beta')}{CK - (AC - G^2)\rho'^2}.$$

Enfin on aura en intégrant la valeur de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$,

$$\theta = f + ht + \frac{Fs + Gu}{C}.$$

De ſorte que l'on connoîtra ainſi toutes les variables en fonctions de t; & le problême ſera réſolu.

Au reſte, comme cette ſolution eſt fondée ſur l'hypothèſe que s, u, & $\frac{d\theta}{dt}$ ſoient de très-petites quantités, il faudra, pour qu'elle ſoit légitime, 1°. que les conſtantes α, α', & h ſoient auſſi très-petites; 2°. que les racines ρ, ρ' ſoient réelles & inégales, afin que l'angle t ſoit toujours ſous le ſigne des ſinus. Or cette ſeconde condition exige ces deux-ci,

$$(A+B)C+F^2-G^2<0,$$

$$4((AB-H^2)C^2+(AF^2-BG^2)C)<((A+B)C+F^2-G^2)^2;$$

leſquelles dépendent uniquement de la figure du corps, & de la ſituation du point de ſuſpenſion.

54. Suppoſons en ſecond lieu que les conſtantes F & G ſoient auſſi très-petites du même ordre que ζ' & ζ''; alors négligeant les quantités du ſecond ordre, & mettant s, u à la place de ζ', ζ'', les équations différentielles de l'article 52 deviendront

$$\frac{A(d.sd\theta+d^2u)}{dt^2}-\frac{Gd^2\theta}{dt^2}-\frac{H(d.ud\theta-d^2s)}{dt^2}$$
$$+\frac{(C-B)(ud\theta-ds)d\theta}{dt^2}+\frac{Fd\theta^2}{dt^2}$$
$$+\frac{H(sd\theta+du)d\theta}{dt^2}+Ku=0,$$

$$\frac{B(d.ud\theta-d^2s)}{dt^2}-\frac{Fd^2\theta}{dt^2}-\frac{H(d.sd\theta+d^2u)}{dt^2}$$

$$+\frac{(A-C)(s\,d\theta+du)\,d\theta}{dt^2}-\frac{G\,d\theta^2}{dt^2}$$

$$-\frac{H(u\,d\theta-ds)\,d\theta}{dt^2}-Ks=0,$$

$$\frac{C\,d^2\theta}{dt^2}=0.$$

La derniere donne $\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$, & intégrant $\frac{d\theta}{dt}=n$, n étant une conſtante arbitraire de grandeur quelconque.

Subſtituant cette valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ dans les deux équations, on aura celles-ci,

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+H\frac{d^2s}{dt^2}+(A+B-C)n\frac{ds}{dt}+(C-B)n^2u$$

$$+Fn^2+Hn^2s+Ku=0,$$

$$B\frac{d^2s}{dt^2}+H\frac{d^2u}{dt^2}-(A+B-C)n\frac{du}{dt}+(C-A)n^2s$$

$$+Gn^2+Hn^2u+Ks=0,$$

dont l'intégration n'a aucune difficulté.

Qu'on les diviſe par n^2, & qu'on y remette, pour plus de ſimplicité, $d\theta$ à la place de $n\,dt$, en ſe ſouvenant que $d\theta$, eſt déſormais conſtant, on aura, en ordonnant les termes, & faiſant $L=\frac{K}{n^2}=\frac{Km}{n^2}$ (art. 50),

$$(C\text{-}A+L)s+B\frac{d^2s}{d\theta^2}+(C\text{-}A\text{-}B)\frac{du}{d\theta}+H\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+G=0,$$

$$(C\text{-}B+L)u+A\frac{d^2u}{d\theta^2}- \qquad B)\frac{ds}{d\theta}+H\left(s+\frac{d^2s}{d\theta^2}\right)+F=0.$$

Pour intégrer ces équations, je commence par faire dif-

paroître les termes tout conſtans, en ſuppoſant $s = x + f$, $u = y + h$, & déterminant les conſtantes f, h, enſorte que les termes F & G diſparoiſſent; ce qui donnera ces deux équations de condition,

$$(C - A + L) f + f + Hh + G = 0, (C - B + L) h + Hf + F = 0;$$

d'où l'on tirera

$$f = \frac{FH - G(C - B + L)}{(C - B + L)(C - A + L) - H^2},$$

$$h = \frac{GH - F(C - A + L)}{(C - B + L)(C - A + L) - H^2};$$

& l'on aura en x, y, θ, les mêmes équations qu'en s, u, θ, avec cette ſeule différence que les termes conſtans G, F n'y ſeront plus.

Je ſuppoſe maintenant $x = \alpha e^{i\theta}$ $y = \beta e^{i\theta}$, α, β, & i étant des conſtantes indéterminées, & e le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1; comme tous les termes des équations à intégrer contiennent x & y à la premiere dimenſion, il s'enſuit qu'ils ſeront après les ſubſtitutions, tous diviſibles par $e^{i\theta}$, & il reſtera ces deux équations de condition,

$$(C - A + L + Bi^2)\alpha + ((C - A - B)i + H(1 + i^2))\beta = 0,$$

$$(C - B + L + Ai^2)\beta - ((C - A - B)i + H(1 + i^2))\alpha = 0,$$

leſquelles donnent

$$\alpha = -\frac{C - A + L + Bi^2}{(C - A - B)i + H(1 + i^2} = \frac{(C - A - B)i - H(1 + i^2)}{C - B + L + Ai^2},$$

de ſorte qu'on aura, en multipliant en croix, cette équation en i,

$$(C-B+L+Ai^2)(C-A+L+Bi^2)+(C-A-B)^2 i^2-H^2(1+i^2)^2=0,$$

laquelle, en faisant $1+i^2=\rho$, se réduit à cette forme,

$$(AB-H^2)\rho^2+((A+B)(L-C)+C^2)\rho+L^2-2L(A+B-C)=0.$$

Ayant déterminé ρ par cette équation, on aura

$$x=\alpha e^{\theta\sqrt{(\rho-1)}},\ y=\alpha\frac{(A+B-C)\sqrt{(\rho-1)}+H\rho}{A+B-C-L-C\rho}e^{\theta\sqrt{(\rho-1)}},$$

& la constante α demeurera indéterminée. Or comme l'équation en ρ a deux racines, & que le radical $\sqrt{(\rho-1)}$ peut être pris également en plus & en moins, on aura ainsi quatre valeurs différentes de x, y, lesquelles étant réunies, satisferont également aux équations proposées, puisque les variables x, y, n'y sont que sous la forme linéaire. Prenant donc quatre constantes différentes pour α, on aura de cette maniere les valeurs complettes de x & y, puisque ces valeurs ne dépendant que de deux équations différentielles du second ordre, ne sauroient renfermer au-delà de quatre constantes arbitraires.

55. Pour que les expressions de x & y ne contiennent point d'arcs de cercle, il faut que $\sqrt{(\rho-1)}$ soit imaginaire, & qu'ainsi ρ soit une quantité réelle & moindre que l'unité.

Dénotons par ρ & σ les deux racines de l'équation en ρ, supposées réelles & moindres que l'unité; & donnons aux quatre constantes arbitraires cette forme imaginaire,

$$\frac{\alpha e^{\beta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ -\frac{\alpha e^{-\beta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ \frac{\gamma e^{\varepsilon\sqrt{1}}}{2\sqrt{-1}},\ -\frac{\gamma e^{-\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

on

on aura en faisant ces substitutions, & passant des exponentielles aux sinus & cosinus, ces expressions complettes & réelles de x & y.

$$x = \alpha \sin(\theta \sqrt{(1-\rho)} + \beta)$$

$$+ \gamma \sin(\theta \sqrt{(1-\sigma)} + \varepsilon),$$

$$y = \frac{\alpha(A+B-C)\sqrt{(1-\rho)}}{B-C+A(1-\rho)-L} \cos(\theta \sqrt{(1-\rho)} + \beta)$$

$$+ \frac{\alpha H \rho}{B-C+A(1-\rho)-L} \sin(\theta \sqrt{(1-\rho)} + \beta)$$

$$+ \frac{\gamma(A+B-C)\sqrt{(1-\sigma)}}{B-C+A(1-\sigma)-L} \cos(\theta \sqrt{(1-\sigma)} + \varepsilon)$$

$$+ \frac{\gamma H \sigma}{B-C-A(1-\sigma)-L} \sin(\theta \sqrt{(1-\sigma)} + \varepsilon),$$

où α, γ, β, ε sont des constantes arbitraires, dépendantes de l'état initial du corps.

Ayant ainsi x & y, on aura

$$s = x + \frac{FH + G(B-C-L)}{(A-C-L)(B-C-L)-H^2},$$

$$u = y + \frac{GH + F(A-C-L)}{(A-C-L)(B-C-L)-H^2},$$

Donc prenant pour θ un angle quelconque proportionnel au tems, on aura (art. 52) ces valeurs des neuf variables ξ', η', ζ', ξ'', &c,

$\xi' = \cos\theta$, $\eta' = \sin\theta$, $\zeta' = s$,

$\xi'' = -\sin\theta$, $\eta'' = \cos\theta$, $\zeta'' = u$,

$\xi''' = -s\cos\theta + u\sin\theta$, $\eta''' = -s\sin\theta - u\cos\theta$, $\zeta''' = 1$;

ensorte qu'on connoîtra les coordonnées ξ, η, ζ de chaque

point du corps pour un inſtant quelconque (article 12).

Si on compare les expreſſions précédentes de ξ', η', &c, avec celles de l'article 30, on en déduira facilement les valeurs des angles de rotation φ, ψ, ω; & l'on trouvera $\varphi + \psi = \theta$, ſin φ ſin $\omega = s$, coſ φ coſ $\omega = u$; d'où l'on tire;

$$\text{tang. } \omega = \sqrt{(s^2 + u^2)}, \ \text{tang } \varphi = \frac{s}{u}, \ \psi = \theta - \varphi.$$

Et il eſt facile de voir d'après les définitions de l'article 29, que ω ſera l'inclinaiſon ſuppoſée très-petite de l'axe du corps avec la verticale, que ψ ſera l'angle que cet axe décrit en tournant autour de la verticale, & que φ ſera l'angle que le corps même décrit en tournant autour du même axe, ces deux derniers angles pouvant être de grandeur quelconque.

56. Mais il faut, pour l'exactitude de cette ſolution, que les variables s & u demeurent toujours très-petites. Ainſi, non-ſeulement les conſtantes α & γ qui dépendent de l'état initial du corps devront être très-petites; mais il faudra que les valeurs des conſtantes F & G, données par la figure du corps, ſoient auſſi très-petites; & que de plus les racines ρ & σ ſoient réelles & poſitives, afin que l'angle θ ſoit toujours renfermé dans des ſinus ou coſinus.

Si on ſuppoſe $F = 0$, $G = 0$, ſavoir, $SbcDm = 0$, $SacDm = 0$, on aura les conditions néceſſaires pour que les momens des forces centrifuges autour de l'axe du corps, qui eſt en même-tems celui des coordonnées c, ſe détruiſent, enſorte que le corps puiſſe tourner uniformément & librement autour de cet axe. Or on ſait qu'il y a dans chaque corps trois axes perpendiculaires entr'eux, & paſſant par le

centre de gravité, lesquels ont cette propriété, & qu'on nomme communément, d'après M. Euler, les axes principaux du corps. Donc puisque nous avons supposé que l'axe du corps passe en même-tems par le centre de gravité & par le point de suspension, il s'ensuit que les quantités F & G seront nulles, lorsque le corps sera suspendu par un point quelconque pris dans un de ses axes principaux.

Donc pour que ces quantités, sans être absolument nulles, soient du moins très-petites, il faudra que le point de suspension du corps soit très-près d'un de ses axes principaux; c'est la premiere condition nécessaire pour que l'axe du corps ne fasse que de très-petites oscillations autour de la verticale, le corps lui-même ayant d'ailleurs un mouvement quelconque de rotation autour de cet axe.

L'autre condition nécessaire pour que ces oscillations soient toujours très-petites, dépend de l'équation en ρ, & se réduit à celle-ci,

$$4((A+B)(L-C)+C^2) > (AB-H^2)(L^2-2L(A+B-C)),$$

$$\frac{2(AB-H^2)+(A+B)(L-C)+A^2}{AB-H^2} > 0,$$

$$\frac{(A-C-L)(B-C-L)-H^2}{AB-H^2} > 0.$$

lesquelles dépendent à la fois de la situation du point de suspension & de la figure du corps.

57. La solution que nous venons de donner, embrasse la théorie des petites oscillations des pendules dans toute la généralité dont elle est susceptible. On sait que Huyghens a donné le premier la théorie des oscillations

circulaires; feu M. Clairaut y a ajouté enſuite celle des oſcillations coniques, qui ont lieu lorſque le pendule étant tiré de ſa ligne de repos, reçoit une impulſion dont la direction ne paſſe pas par cette ligne. Mais ſi le pendule reçoit en même-tems un mouvement de rotation autour de ſon axe, la force centrifuge produite par ce mouvement pourra déranger beaucoup les oſcillations, ſoit circulaires, ſoit coniques; & la détermination de ces nouvelles oſcillations eſt un problême qui n'avoit pas encore été réſolu complettement, & pour des pendules de figure quelconque. C'eſt la raiſon qui m'a déterminé à m'en occuper ici.

SEPTIEME SECTION.

Sur les Principes de l'Hydrodynamique.

LA détermination du mouvement des fluides eſt l'objet de l'Hydrodynamique; celui de l'Hydraulique ordinaire ſe réduit à l'art de conduire les eaux, & de les faire ſervir au mouvement des machines. Cet art a dû être cultivé de tout tems, pour le beſoin qu'on en a toujours eu; & les anciens y ont peut-être autant excellé que nous, à en juger par ce qu'ils nous ont laiſſé dans ce genre.

Mais l'Hydrodynamique eſt une ſcience née dans ce ſiecle. Newton a tenté le premier de calculer par les principes de la Méchanique, le mouvement des fluides; & M. d'Alembert eſt le premier qui ait réduit les vraies loix de leur mouvement à des équations analitiques. Archimede &

Galilée (car l'intervalle qui a ſéparé ces deux grands génies, diſparoît dans l'hiſtoire de la Méchanique) ne s'étoient occupés que de l'équilibre des fluides.

Torricelli commença à examiner le mouvement de l'eau qui ſort d'un vaſe par une ouverture fort petite, & à y chercher une loi. Il trouva qu'en donnant au jet une direction verticale, il atteint toujours à très-peu-près le niveau de l'eau dans le vaſe; & comme il eſt à préſumer qu'il l'atteindroit exactement ſans la réſiſtance de l'air & les frottemens, Torricelli en conclut que la vîteſſe de l'eau qui s'écoule eſt la même que celle qu'elle auroit acquiſe en tombant librement de la hauteur du niveau, & que cette vîteſſe eſt par conſéquent proportionnelle à la racine quarrée de la même hauteur.

Ne pouvant cependant parvenir à une démonſtration rigoureuſe de cette propoſition, il ſe contenta de la donner comme un principe d'expérience, à la fin de ſon Traité *de Motu naturaliter accelerato*, imprimé en 1643. Newton entreprit de la démontrer dans le ſecond livre des Principes mathématiques qui parurent en 1687; mais il faut avouer que c'eſt l'endroit le moins ſatisfaiſant de ce grand Ouvrage.

Si on conſidere une colonne d'eau qui tombe librement dans le vuide, il eſt aiſé de ſe convaincre qu'elle doit prendre la figure d'un conoïde formé par la révolution d'une hyperbole du quatrieme ordre autour de l'axe vertical; car la vîteſſe de chaque tranche horizontale eſt d'un côté comme la racine quarrée de la hauteur d'où elle eſt deſcendue, & de l'autre elle doit être par la continuité de l'eau, en raiſon inverſe de la largeur de cette tranche, & par conſéquent en raiſon inverſe du quarré de ſon rayon; d'où il réſulte que la portion de l'axe ou l'abſciſſe qui repréſente la hauteur,

eſt en raiſon inverſe de la quatrieme puiſſance de l'ordonnée de l'hyperbole génératrice. Si donc on ſe repréſente un vaſe qui ait la figure de ce conoïde, & qui ſoit entretenu toujours plein d'eau, & qu'on ſuppoſe le mouvement de l'eau parvenu à un état permanent; il eſt clair que chaque particule d'eau y deſcendra comme ſi elle étoit libre, & qu'elle aura par conſéquent au ſortir de l'orifice, la vîteſſe due à la hauteur du vaſe de laquelle elle eſt tombée.

Or Newton imagine que l'eau qui remplit un vaſe cylindrique vertical, percé à ſon fond d'une ouverture par laquelle elle s'échappe, ſe partage naturellement en deux parties, dont l'une eſt ſeule en mouvement, & a la figure du conoïde dont nous venons de parler, c'eſt ce qu'il nomme la cataracte; l'autre eſt en repos, comme ſi elle étoit glacée. De cette maniere il eſt clair que l'eau doit s'échapper avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur du vaſe, comme Torricelli l'avoit trouvée par l'expérience. Cependant Newton ayant meſuré la quantité d'eau ſortie dans un tems donné, & l'ayant comparée à la grandeur de l'orifice, en avoit conclu, dans la premiere édition de ſes Principes, que la vîteſſe au ſortir du vaſe n'étoit due qu'à la moitié de la hauteur de l'eau dans le vaſe. Cette erreur venoit de ce qu'il n'avoit pas d'abord fait attention à la contraction de la veine; il y eut égard dans la ſeconde édition qui parut en 1714, & il reconnut que la ſection la plus petite de la veine étoit à l'ouverture du vaſe à peu près comme 1 à $\sqrt{2}$; de ſorte qu'en prenant cette ſection pour le vrai orifice, la vîteſſe doit être augmentée dans la même raiſon de 1 à $\sqrt{2}$, & répondre par conſéquent à la hauteur entiere de l'eau. De cette maniere ſa

théorie ſe trouva rapprochée de l'expérience, mais elle n'en devint pas pour cela plus exacte; car la formation de la cataracte ou vaſe fictif dans lequel l'eau eſt ſuppoſée ſe mouvoir, tandis que l'eau latérale demeure en repos, eſt évidemment contraire aux loix connues de l'équilibre des fluides; puiſque l'eau qui tomberoit dans cette cataracte, avec toute la force de ſa peſanteur, n'exerçant aucune preſſion latérale, ne ſauroit réſiſter à celle du fluide ſtagnant qui l'environne.

Vingt ans auparavant Varignon avoit donné à l'Académie des Sciences de Paris, une explication plus naturelle & plus plauſible du phénomene dont il s'agit. Ayant remarqué que quand l'eau s'écoule d'un vaſe cylindrique par une petite ouverture faite au fond, elle n'a dans le vaſe qu'un mouvement très-petit & ſenſiblement uniforme pour toutes les particules, il en conclut qu'il ne s'y faiſoit aucune accélération, & que la partie du fluide qui s'échappe à chaque inſtant, recevoit tout ſon mouvement de la preſſion produite par le poids de la colonne de fluide dont elle eſt la baſe. Ainſi ce poids qui eſt comme la largeur de l'orifice multipliée par la hauteur de l'eau dans le vaſe, doit être proportionnel à la quantité de mouvement engendrée dans la particule qui ſort à chaque inſtant par le même orifice. Or cette quantité de mouvement eſt, comme l'on ſait, proportionnelle à la vîteſſe & à la maſſe, & la maſſe eſt ici comme le produit de la largeur de l'orifice par le petit eſpace que la particule parcourt dans l'inſtant donné, eſpace qui eſt évidemment proportionnel à la vîteſſe même de cette particule; par conſéquent la quantité du mouvement dont il s'agit, eſt en raiſon de la largeur de l'orifice multipliée par le quarré de la vîteſſe. Donc enfin la hauteur de l'eau dans

le vaſe eſt proportionelle au quarré de la vîteſſe avec laquelle elle s'échappe, ce qui eſt le théorême de Torricelli.

Ce raiſonnement a néanmoins encore quelque choſe de vague; car on y ſuppoſe tacitement que la petite maſſe qui s'échappe à chaque inſtant du vaſe, acquiert bruſquement toute ſa vîteſſe par la preſſion de la colonne qui répond à l'orifice. Or on ſait qu'une preſſion ne peut pas produire tout-à-coup une vîteſſe finie. Mais en ſuppoſant, ce qui eſt naturel, que le poids de la colonne agiſſe ſur la particule pendant tout le tems qu'elle met à ſortir du vaſe, il eſt clair que cette particule recevra un mouvement accéléré, dont la quantité, au bout d'un tems quelconque, ſera proportionnelle à la preſſion multipliée par le tems. Donc le produit du poids de la colonne par le tems de la ſortie de la particule, ſera égal au produit de la maſſe de cette particule, par la vîteſſe qu'elle aura acquiſe; & comme la maſſe eſt le produit de la largeur de l'orifice par le petit eſpace que la particule décrit en ſortant du vaſe, eſpace qui, par la nature des mouvemens uniformément accélérés, eſt comme le produitt de la vîteſſe par le tems; il s'enſuit que la hauteur de la colonne, ſera de nouveau comme le quarré de la vîteſſe acquiſe. Cette concluſion eſt donc rigoureuſe, pourvu qu'on accorde que chaque particule en ſortant du vaſe, eſt preſſée par le poids entier de toute la colonne du fluide qui a cette particule pour baſe; c'eſt ce qui auroit lieu en effet, ſi le fluide contenu dans le vaſe y étoit ſtagnant, car alors ſa preſſion ſur la partie du fond où eſt l'ouverture, ſeroit égale au poids de la colonne dont elle eſt la baſe; mais cette preſſion doit être différente, lorſque le fluide eſt en mouvement. Cependant il eſt clair que plus il approchera de l'état

de

de repos, plus auſſi ſa preſſion ſur le fond approchera du poids total de la colonne verticale; d'ailleurs l'expérience fait voir que le mouvement du fluide dans le vaſe, eſt d'autant moindre que l'ouverture eſt plus petite. Ainſi la théorie précédente approchera d'autant plus de la vérité, que les dimenſions du vaſe ſeront plus grandes relativement à l'ouverture par laquelle le fluide s'écoule; & c'eſt ce que l'expérience confirme.

Par une raiſon contraire, la même théorie devient inſuffiſante pour déterminer le mouvement des fluides qui coulent dans des tuyaux dont la largeur eſt aſſez petite, & varie peu. Il faut alors conſidérer à la fois tous les mouvemens des particules du fluide, & examiner comment ils doivent être changés & altérés par la figure du canal. Or l'expérience apprend que quand le tuyau a une direction peu différente de la verticale, les différentes tranches horiſontales du fluide conſervent à très-peu-près leur parallélifme, enſorte qu'une tranche prend toujours la place de celle qui la précede; d'où il ſuit, à cauſe de l'incompreſſibilité du fluide, que la vîteſſe de chaque tranche horiſontale, eſtimée ſuivant le ſens vertical, doit être en raiſon inverſe de la largeur de cette tranche, largeur qui eſt donnée par la figure du vaſe.

Il ſuffit donc de déterminer le mouvement d'une ſeule tranche, & le problême eſt en quelque maniere analogue à celui du mouvement d'un pendule compoſé. Ainſi, comme ſelon la théorie de Jacques Bernoulli, les mouvemens acquis & perdus à chaque inſtant par les différens poids qui forment le pendule, ſe font mutuellement équilibre dans le levier, il doit auſſi y avoir équilibre dans le tuyau entre les

differentes tranches du fluide animées chacune de la vîteſſe acquiſe ou perdue à chaque inſtant ; & de-là par l'application des principes déja connus de l'équilibre des fluides, on auroit pu d'abord déterminer le mouvement d'un fluide dans un tuyau, comme on avoit déterminé celui d'un pendule composé. Mais ce n'eſt jamais par les routes les plus ſimples & les plus directes, que l'eſprit humain parvient aux vérités, de quelque genre qu'elles ſoient ; & la matiere que nous traitons en fournit un exemple frappant.

Nous avons expoſé dans la premiere Section les différens pas qu'on avoit faits pour arriver à la ſolution du problême du centre d'oſcillation ; & nous y avons vu que la véritable théorie de ce problême n'avoit été découverte par Jacques Bernoulli, que long-tems après que Huyghens l'eut réſolu par le principe indirect de la conſervation des forces vives. Il en a été de même du problême du mouvement des fluides dans des vaſes ; & il eſt ſurprenant qu'on n'ait pas ſu d'abord profiter pour celui-ci des lumieres que l'on avoit déja acquiſes par l'autre.

Le même Principe de la conſervation des forces vives, fournit encore la premiere ſolution de ce dernier problême, & ſervit de baſe à l'Hydrodynamique de Daniel Bernoulli, imprimée en 1738, Ouvrage qui brille d'ailleurs par une Analyſe auſſi élégante dans ſa marche, que ſimple dans ſes réſultats. Mais l'inexactitude de ce principe qui n'avoit pas encore été démontré d'une maniere générale, devoit en jetter auſſi ſur les propoſitions qui en réſultent, & faiſoit déſirer une théorie plus sûre, & appuyée uniquement ſur les loix fondamentales de la Méchanique. Maclaurin & Jean Bernoulli entreprirent de remplir cet objet, l'un dans ſon

Traité des Fluxions, & l'autre dans ſa nouvelle Hydraulique, imprimée à la fin de ſes Œuvres. Leurs méthodes, quoique très-différentes, conduiſent aux mêmes réſultats que le principe de la conſervation des forces vives; mais il faut avouer que celle de Maclaurin n'eſt pas aſſez rigoureuſe, & paroît arrangée d'avance, conformément aux réſultats qu'il vouloit obtenir; & quant à la méthode de Jean Bernoulli, ſans adopter en entier les difficultés que M. d'Alembert lui a oppoſées, on doit convenir qu'elle laiſſe encore à déſirer du côté de la clarté & de la préciſion.

On a vu, dans la premiere Section, comment M. d'Alembert, en généraliſant la théorie de Jacques Bernoulli ſur les pendules, étoit parvenu à un Principe de Dynamique ſimple & général, qui réduit les loix du mouvement des corps à celles de leur équilibre. L'application de ce Principe au mouvement des fluides ſe préſentoit d'elle-même, & l'Auteur en donna d'abord un eſſai à la fin de ſa Dynamique, imprimée en 1743; il l'a développée enſuite avec tout le détail convenable dans ſon Traité des Fluides qui parut l'année ſuivante, & qui renferme des ſolutions auſſi directes qu'élégantes des principales queſtions qu'on peut propoſer ſur les fluides qui ſe meuvent dans des vaſes.

Mais ces ſolutions, comme celles de Daniel Bernoulli, étoient appuyées ſur deux ſuppoſitions qui ne ſont pas vraies en général. 1°. Que les différentes tranches du fluide conſervent exactement leur parallèliſme, enſorte qu'une tranche prend toujours la place de celle qui la précéde. 2°. Que la vîteſſe de chaque tranche ne varie point en direction, c'eſt-à-dire, que tous les points d'une même tranche ſont ſuppoſés avoir une vîteſſe égale & parallele. Lorſque le

fluide coule dans des vaſes ou tuyaux fort étroits, les ſuppoſitions dont il s'agit ſont très-plauſibles, & paroiſſent confirmées par l'expérience; mais hors de ce cas elles s'éloignent de la vérité, & il n'y a plus alors d'autre moyen pour déterminer le mouvement du fluide, que d'examiner celui que chaque particule doit avoir.

M. Clairaut avoit donné dans ſa Théorie de la figure de la Terre, imprimée en 1743, les loix générales de l'équilibre des fluides, dont toutes les particules ſont animées par des forces quelconques; il ne s'agiſſoit donc que de paſſer de ces loix à celles de leur mouvement, par le moyen du principe auquel M. d'Alembert avoit réduit, à cette même époque, toute la Dynamique. Ce dernier fit quelques années après ce pas important, à l'occaſion du prix que l'Académie de Berlin propoſa en 1750, ſur la Théorie de la réſiſtance des fluides; & il donna le premier, en 1752, dans ſon Eſſai d'une nouvelle théorie ſur la réſiſtance des fluides, les équations rigoureuſes & générales du mouvement des fluides, ſoit incompreſſibles, ſoit compreſſibles & élaſtiques; équations qui appartiennent à la claſſe de celles qu'on nomme à différences partielles, parce qu'elles ſont entre les différentes parties des différences relatives à pluſieurs variables. Par cette découverte, toute la Méchanique des fluides fut réduite à un ſeul point d'analyſe; & ſi les équations qui la renferment étoient intégrables, on pourroit dans tous les cas déterminer complettement les circonſtances du mouvement & de l'action d'un fluide mu par des forces quelconques; malheureuſement elles ſont ſi rebelles, qu'on n'a pu juſqu'à préſent en venir à bout que dans des cas très-limités.

C'eſt donc dans ces équations & dans leur intégration que

consiste toute la théorie de l'Hydrodynamique. M. d'Alembert employa d'abord pour les trouver, une méthode un peu compliquée; il en donna ensuite une plus simple; mais cette méthode étant fondée sur les loix de l'équilibre particulieres aux fluides, fait de l'Hydrodynamique une science séparée de la Dynamique des corps solides. La réunion que nous avons faite dans la premiere Partie de cet Ouvrage, de toutes les loix de l'équilibre des corps, tant solides que fluides dans une même formule, & l'application que nous venons de faire de cette formule aux loix du mouvement, nous conduisent naturellement à réunir de même la Dynamique & l'Hydrodynamique comme des branches d'un principe unique, & comme des résultats d'une seule formule générale.

C'est l'objet qui reste à remplir pour completter notre travail sur la Méchanique, & acquitter l'engagement pris dans le titre de cet Ouvrage.

HUITIEME SECTION.

Du Mouvement des Fluides incompressibles.

1. ON pourroit déduire immédiatement les loix du mouvement de ces fluides, de celles de leur équilibre, que nous avons trouvées dans la Section septieme de la premiere Partie; car par le Principe général exposé dans la seconde Section, il ne faut qu'ajouter aux forces accélératrices actuelles, les nouvelles forces accélératrices $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$,

dirigées ſuivant les coordonnées rectangles x, y, z.

Ainſi, comme dans les formules de l'article 13 & ſuiv. de la Section ſeptieme citée, on a ſuppoſé toutes les forces accélératrices du fluide déja réduites à trois, X, Y, Z, dans la direction des coordonnées x, y, z; il n'y aura pour appliquer ces formules au mouvement des mêmes fluides, qu'à y ſubſtituer $X + \frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y + \frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z + \frac{d^2 z}{dt^2}$ au lieu de X, Y, Z. Mais nous croyons qu'il eſt plus conforme à l'objet de cet ouvrage d'appliquer directement aux fluides les équations générales données dans la Section quatrieme pour le mouvement d'un ſyſtême quelconque de corps.

§. I.

Équations générales pour le mouvement des Fluides incompreſſibles.

2. On peut conſidérer un fluide incompreſſible comme compoſé d'une infinité de particules qui ſe meuvent librement entr'elles ſans changer de volume; ainſi la queſtion rentre dans le cas de l'article 12 de la Section citée cideſſus.

Soit donc Dm la maſſe d'une particule ou élément quelconque du fluide; X, Y, Z les forces accélératrices qui agiſſent ſur cet élément, réduites pour plus de ſimplicité, aux directions des coordonnées rectangles x, y, z, & tendantes à diminuer ces coordonnées; $L = 0$ l'équation de condition réſultante de l'incompreſſibilité, ou de l'invariabilité du volume de Dm; λ une quantité indéterminée; &

S une caractériſtique intégrale correſpondante à la caractériſtique différentielle D, & relative à toute la maſſe du fluide; on aura pour le mouvement du fluide cette équation générale (Sect. IV, art. 15).

$$S\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z\right)Dm+S\lambda\delta L=0.$$

Il faut maintenant ſubſtituer dans cette équation les valeurs de Dm, & de δL, & après avoir fait diſparoître les différences des variations, s'il y en a; égaler ſéparément à zéro les coëfficiens des variations indéterminées δx, δy, δz.

Retenons la caractériſtique D pour repréſenter les différences relatives à la ſituation inſtantanée des particules contiguës, tandis que la caractériſtique d ſe rapportera uniquement au changement de poſition de la même particule dans l'eſpace; il eſt clair qu'on peut repréſenter le volume de la particule Dm par le parallélipipede $DxDyDz$; ainſi en nommant Δ la denſité de cette particule, on aura . . . $Dm=\Delta DxDyDz$.

De plus, il eſt viſible que la condition de l'incompreſſibilité ſera contenue dans l'équation $DxDyDz=conſt$; de ſorte qu'on aura $L=DxDyDz-conſt$; & par conſéquent $\delta L=\delta.(DxDyDz)$; pour déterminer cette différentielle, il faut employer les mêmes conſidérations que dans l'article 14 de la Section ſeptieme de la premiere Partie; ainſi en changeant ſeulement d en D dans les formules de cet endroit, on aura

$$\delta(DxDyDz) = DxDyDz\left(\frac{D\delta x}{Dx} + \frac{D\delta y}{Dy} + \frac{D\delta z}{Dz}\right).$$

Cette quantité étant multipliée par λ, & intégrée relativement à toute la maſſe du fluide, on aura la valeur de $S\lambda\delta L$, dans laquelle il faudra faire diſparoître les doubles ſignes $D\delta$ par les mêmes procédés déja employés dans l'article 13 de la Section citée. On aura ainſi :

$$S\lambda\delta L = S(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x')DyDz +$$
$$S(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y')DxDz + S(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')DxDy$$
$$- S\left(\frac{D\lambda}{Dx}\delta x + \frac{D\lambda}{Dy}\delta y + \frac{D\lambda}{Dz}\delta z\right)DxDyDz.$$

Faiſant donc ces ſubſtitutions dans le premier membre de l'équation générale, elle contiendra premiérement cette formule intégrale totale,

$$S\left(\left(\Delta\frac{d^2x}{dt^2} + \Delta X - \frac{D\lambda}{Dx}\right)\delta x +\right.$$
$$\left(\Delta\frac{d^2y}{dt^2} + \Delta Y - \frac{D\lambda}{Dy}\right)\delta y +$$
$$\left.\left(\Delta\frac{d^2z}{dt^2} + \Delta Z - \frac{D\lambda}{Dz}\right)\delta z\right)DxDyDz;$$

dans laquelle il faudra faire ſéparément égaux à zéro les coëfficiens des variations δx, δy, δz; ce qui donnera ces trois équations indéfinies pour tous les points de la maſſe fluide.

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)-\frac{D\lambda}{Dx}=0\\
&\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)-\frac{D\lambda}{Dy}=0\\
&\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)-\frac{D\lambda}{Dz}=0.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (A).$$

Il reſtera enſuite à faire diſparoître les intégrales partielles,

$$S(\lambda''\delta x''-\lambda'\delta x')\,Dy\,Dz+$$
$$S(\lambda''\delta y''-\lambda'\delta y')\,Dx\,Dz+$$
$$S(\lambda''\delta z''-\lambda'\delta z')\,Dx\,Dy,$$

leſquelles ne ſe rapportent qu'à la ſurface extérieure du fluide; & l'on en conclura, comme dans l'article 16 de la Section ſeptieme citée, que la valeur de λ devra être nulle pour tous les points de la ſurface où le fluide eſt libre; on prouvera de plus, comme dans les articles 20, 21 de la même Section, que relativement aux endroits où le fluide ſera contenu par des parois fixes, les termes des intégrales précédentes ſe détruiront mutuellement, enſorte qu'il n'en réſultera aucune équation; & en général on démontrera par un raiſonnement ſemblable à celui des articles 24, 25, que la quantité λ rapportée à la ſurface du fluide y exprimera la preſſion que le fluide y exerce, & qui, lorſqu'elle n'eſt pas nulle, doit être contrebalancée par la réſiſtance ou l'action des parois.

3. Les équations qu'on vient de trouver renferment donc les loix générales du mouvement des fluides incompreſſibles;

mais il y faut joindre encore l'équation même qui résulte de la condition de l'incompressibilité du volume $Dx\,Dy\,Dz$ pendant que le fluide se meut; cette équation sera donc représentée par $d.(Dx\,Dy\,Dz) = 0$; de sorte qu'en changeant δ en d dans l'expression de $\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ trouvée ci-dessus, & égalant à zéro, on aura

$$\frac{D\,dx}{Dx} + \frac{D\,dy}{Dy} + \frac{D\,dz}{Dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$

Cette équation combinée avec les trois équations (A) de l'article précédent, servira donc à déterminer les quatre inconnues x, y, z, & λ.

4. Pour avoir une idée nette de la nature de ces équations, il faut considérer que les variables x, y, z qui déterminent la position d'une particule dans un instant quelconque, doivent appartenir à la fois à toutes les particules dont la masse fluide est composée; elles doivent donc être des fonctions du tems t, & des valeurs que ces mêmes variables ont eues au commencement du mouvement ou dans un autre instant donné. Nommant donc a, b, c les valeurs de x, y, z, lorsque $t = 0$; il faudra que les valeurs complettes de x, y, z, soient des fonctions de a, b, c, t. De cette maniere les différences marquées par la caractéristique D, se rapporteront uniquement à la variabilité de a, b, c; & les différences marquées par l'autre caractéristique d se rapporteront simplement à la variabilité de t. Mais comme dans les équations trouvées il y a des différences relatives aux variables mêmes x, y, z, il faudra, pour l'uniformité, réduire celles-ci aux différences relatives à a, b, c, ce qui est toujours possible; car on n'a

qu'à concevoir qu'on ait ſubſtitué dans les fonctions avant la différentiation les valeurs mêmes de x, y, z en a, b, c.

5. En regardant donc les variables x, y, z, comme des fonctions de a, b, c, t, & repréſentant les différentielles ſelon la notation ordinaire des différences partielles, on aura

$$Dx = \frac{dx}{da}\,da + \frac{dx}{db}\,db + \frac{dx}{dc}\,dc,$$

$$Dy = \frac{dy}{da}\,da + \frac{dy}{db}\,db + \frac{dy}{dc}\,dc,$$

$$Dz = \frac{dz}{da}\,da + \frac{dz}{db}\,db + \frac{dz}{dc}\,dc;$$

& regardant en même-tems la fonction λ comme une fonction de x, y, z, & comme une fonction de a, b, c, on aura

$$D\lambda = \frac{D\lambda}{Dx}\,Dx + \frac{D\lambda}{Dy}\,Dy + \frac{D\lambda}{Dz}\,Dz$$

$$= \frac{d\lambda}{da}\,da + \frac{d\lambda}{db}\,db + \frac{d\lambda}{dc}\,dc;$$

ces deux expreſſions de $D\lambda$ devant être identiques, ſi on ſubſtitue dans la premiere les valeurs de Dx, Dy, Dz, en da, db, dc, il faudra que les coëfficiens de da, db, dc, ſoient les mêmes de part & d'autre; ce qui fournira trois équations qui ſerviront à déterminer les valeurs de $\frac{D\lambda}{Dx}$, $\frac{D\lambda}{Dy}$, $\frac{D\lambda}{Dz}$, en $\frac{d\lambda}{da}$, $\frac{d\lambda}{db}$, $\frac{d\lambda}{dc}$; ce ſera la même choſe ſi on ſubſtitue dans la ſeconde expreſſion de $D\lambda$ les valeurs de da, db, dc, en Dx, Dy, Dz tirées des expreſſions de ces dernieres quantités; alors la comparaiſon

Kkk 2

des termes affectés de Dx, Dy, Dz donnera immédiatement les valeurs de $\frac{D\lambda}{Dx}$, &c.

Or par les regles ordinaires de l'élimination on a

$$da = \frac{\alpha Dx + \alpha' Dy + \alpha'' Dz}{\theta},$$

$$db = \frac{\beta Dx + \beta' Dy + \beta'' Dz}{\theta},$$

$$dc = \frac{\gamma Dx + \gamma' Dy + \gamma'' Dz}{\theta},$$

en supposant

$$\alpha = \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db}, \quad \alpha' = \frac{dx}{dc} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{db} \times \frac{dz}{dc},$$

$$\alpha'' = \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db}, \quad \beta = \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da} - \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc},$$

$$\beta' = \frac{dx}{da} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{dc} \times \frac{dz}{da}, \quad \beta'' = \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc},$$

$$\gamma' = \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da}, \quad \gamma' = \frac{dx}{db} \times \frac{dz}{da} - \frac{dx}{da} \times \frac{dz}{db},$$

$$\gamma'' = \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{db} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da},$$

$$\theta = \frac{dx}{\ } \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da}$$

$$- \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db}.$$

Faisant donc ces substitutions dans l'expression $\frac{d\lambda}{da}\, da + \frac{d\lambda}{db}\, db + \frac{d\lambda}{dc}\, dc$, & comparant ensuite avec l'expression identique $\frac{D\lambda}{Dx}\, Dx + \frac{D\lambda}{Dy}\, Dy + \frac{D\lambda}{Dz}\, Dz$, on aura

$$\frac{D\lambda}{Dx}=\frac{\alpha}{\theta}\times\frac{d\lambda}{da}+\frac{\beta}{\theta}\times\frac{d\lambda}{db}+\frac{\gamma}{\theta}\times\frac{d\lambda}{dc},$$

$$\frac{D\lambda}{Dy}=\frac{\alpha'}{\theta}\times\frac{d\lambda}{da}+\frac{\beta'}{\theta}\times\frac{d\lambda}{db}+\frac{\gamma'}{\theta}\times\frac{d\lambda}{dc},$$

$$\frac{D\lambda}{Dz}=\frac{\alpha''}{\theta}\times\frac{d\lambda}{da}+\frac{\beta''}{\theta}\times\frac{d\lambda}{db}+\frac{\gamma''}{\theta}\times\frac{d\lambda}{dc}.$$

Ainsi ſubſtituant ces valeurs dans les trois équations (A) de l'article 2, elles deviendront de cette forme, après avoir multiplié par θ,

$$\left.\begin{aligned}&\theta\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)-\alpha\frac{d\lambda}{da}-\beta\frac{d\lambda}{db}-\gamma\frac{d\lambda}{dc}=0\\&\theta\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)-\alpha'\frac{d\lambda}{da}-\beta'\frac{d\lambda}{db}-\gamma'\frac{d\lambda}{dc}=0\\&\theta\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)-\alpha''\frac{d\lambda}{da}-\beta''\frac{d\lambda}{db}-\gamma''\frac{d\lambda}{dc}=0\end{aligned}\right\}\ldots(C).$$

où il n'y a, comme l'on voit, que des différences partielles relatives à a, b, c, t.

Dans ces équations la quantité Δ qui exprime la denſité, eſt une fonction donnée de a, b, c ſans t puiſqu'elle doit demeurer invariable pour chaque particule; & ſi le fluide eſt homogène, Δ ſera alors une conſtante indépendante de a, b, c, t. Quant aux quantités X, Y, Z qui repréſentent les forces accélératrices, elles ſeront le plus ſouvent données en fonctions de x, y, z, t.

6. On peut, au reſte, réduire les équations précédentes à une forme plus ſimple, en ajoutant enſemble, après les avoir multipliées reſpectivement & ſucceſſivement par $\frac{dx}{da}$,

$\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$, par $\frac{dx}{db}$, $\frac{dy}{db}$, $\frac{dz}{db}$, & par $\frac{dx}{dc}$, $\frac{dy}{dc}$, $\frac{dz}{dc}$; car d'après les expreſſions de θ, α, β, γ, α', β', &c, données ci-deſſus, il eſt aiſé de voir qu'on aura $\theta = \alpha \frac{dx}{da} + \alpha' \frac{dy}{da} + \alpha'' \frac{dz}{da} = \beta \frac{dx}{db} + \beta' \frac{dy}{db} + \beta'' \frac{dz}{db} = \gamma \frac{dx}{dc} + \gamma' \frac{dy}{dc} + \gamma'' \frac{dz}{dc}$, enſuite $\beta \frac{dx}{da} + \beta' \frac{dy}{da} + \beta'' \frac{dz}{da} = 0$, $\gamma \frac{dx}{da} + \gamma' \frac{dy}{da} + \gamma'' \frac{dz}{da} = 0$, $\alpha \frac{dx}{db} + \alpha' \frac{dy}{db} + \alpha'' \frac{dz}{db} = 0$, & ainſi de ſuite. De ſorte que par ces opérations & ces réductions, on aura les transformées

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\frac{dx}{da} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\frac{dy}{da} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\frac{dz}{da}\right) - \frac{d\lambda}{da} = 0 \\ &\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\frac{dx}{db} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\frac{dy}{db} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\frac{dz}{db}\right) - \frac{d\lambda}{db} = 0 \\ &\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\frac{dx}{dc} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\frac{dy}{dc} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\frac{dz}{dc}\right) - \frac{d\lambda}{dc} = 0 \end{aligned}\right\} (D).$$

7. On transformera, d'une maniere ſemblable, l'équation (B) de l'article 3; & pour cela, comme, d'après la remarque de l'article 4, les différentielles dx, dy, dz ne ſont relatives qu'à la variable t, on les réduira d'abord aux différences partielles $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$, $\frac{dz}{dt}dt$; enſorte que l'équation dont il s'agit étant diviſée par dt, ſera de la forme

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx} + \frac{D.\frac{dy}{dt}}{Dy} + \frac{D.\frac{dz}{dt}}{Dz} = 0.$$

Or, par les formules trouvées ci-dessus pour les valeurs de $\frac{D\lambda}{Dx}$, $\frac{D\lambda}{Dy}$, &c, on aura pareillement, en substituant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, &c, à la place de λ,

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx} = \frac{\alpha}{\theta} \times \frac{d.\frac{dx}{dt}}{da} + \frac{\beta}{\theta} \times \frac{d.\frac{dx}{dt}}{db} + \frac{\gamma}{\theta} \times \frac{d.\frac{dx}{dt}}{dc},$$

& comme dans le second membre de cette équation, la quantité x est regardée comme une fonction de a, b, c, t, on aura $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{da} = \frac{d^2x}{da\,dt}$, & ainsi des autres différences partielles de x; de sorte qu'on aura simplement

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx} = \frac{\alpha}{\theta} \times \frac{d^2x}{da\,dt} + \frac{\beta}{\theta} \times \frac{d^2x}{db\,dt} + \frac{\gamma}{\theta} \times \frac{d^2x}{dc\,dt}.$$

On trouvera des expressions semblables pour les valeurs de $\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dy}$ & $\frac{d.\frac{dz}{dt}}{dz}$, & il n'y aura pour cela qu'à changer dans la formule précédente x en y & z.

Faisant donc ces substitutions dans l'équation ci-dessus, elle deviendra après y avoir effacé le dénominateur commun θ,

$$\alpha\frac{d^2x}{da\,dt} + \beta\frac{d^2x}{db\,dt} + \gamma\frac{d^2x}{dc\,dt} +$$
$$\alpha'\frac{d^2y}{da\,dt} + \beta'\frac{d^2y}{db\,dt} + \gamma'\frac{d^2y}{dc\,dt} +$$
$$\alpha''\frac{d^2z}{da\,dt} + \beta''\frac{d^2z}{db\,dt} + \gamma''\frac{d^2z}{dc\,dt} = 0.$$

Le premier membre de cette équation n'eſt autre choſe que la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, comme on peut s'en aſſurer par la différentiation actuelle de l'expreſſion de θ (art. 5).

Ainſi l'équation devient $\frac{d\theta}{dt} = 0$, dont l'intégrale eſt $=$ fonct. (a, b, c).

Suppoſons dans cette équation, $t = 0$, & ſoit K ce que devient alors la quantité θ, on aura $K =$ font. (a, b, c); par conſéquent l'équation ſera $\theta = K$.

Or nous avons ſuppoſé que lorſque $t = 0$, on a $x = a$, $y = b$, $z = c$; donc on aura auſſi alors $\frac{dx}{da} = 1$, $\frac{dx}{db} = 0$, $\frac{dx}{dc} = 0$, $\frac{dy}{da} = 0$, $\frac{dy}{db} = 1$, $\frac{dy}{dc} = 0$, $\frac{dz}{da} = 0$, $\frac{dz}{db} = 0$, $\frac{dz}{dc} = 1$. Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'expreſſion de θ (art. 5), on a $\theta = 1$, donc $K = 1$.

Donc remettant pour θ ſa valeur, dans l'équation dont il s'agit, elle ſera de la forme

$$\frac{dx}{da} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da} -$$
$$\frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db} = 1 \quad (E).$$

Cette équation combinée avec les trois équations (C) ou (D) des articles 5, 6, ſervira donc à déterminer les valeurs de λ, x, y, z, en fonctions de a, b, c, t.

8. Comme les équations dont il s'agit ſont à différences partielles, l'intégration y introduira néceſſairement différentes fonctions arbitraires; & la détermination de ces fonctions

tions devra ſe déduire en partie de l'état initial du fluide, lequel doit être ſuppoſé donné, & en partie de la conſidération de la ſurface extérieure du fluide, qui eſt auſſi donnée ſi le fluide eſt renfermé dans un vaſe, & qui doit être repréſentée par l'équation $\lambda = 0$, lorſque le fluide eſt libre (art. 2).

En effet, dans le premier cas ſi on repréſente par $A = 0$ l'équation des parois du vaſe, A étant une fonction donnée des coordonnées x, y, z de ces parois, en y mettant pour ces variables leurs valeurs en a, b, c, t, on aura une équation entre les coordonnées initiales a, b, c, & le tems t, laquelle repréſentera par conſéquent la ſurface que formoient dans l'état initial les mêmes particules qui après le tems t forment la ſurface repréſentée par l'équation donnée $A = 0$. Si donc on veut que les mêmes particules qui ſont une fois à la ſurface y demeurent toujours; condition qui paroît néceſſaire pour que le fluide ne ſe diviſe pas, & qui eſt reçue généralement dans la théorie des fluides, il faudra que l'équation dont il s'agit ne contienne point le tems t; par conſéquent la fonction A de x, y, z devra être telle que t y diſparoiſſe après la ſubſtitution des valeurs de x, y, z en a, b, c, t.

Par la même raiſon l'équation $\lambda = 0$ de la ſurface libre ne devra point contenir t; ainſi la valeur de λ devra être une ſimple fonction de a, b, e ſans t.

Au reſte, il y a des cas dans le mouvement d'un fluide qui s'écoule d'un vaſe, où la condition dont il s'agit ne doit pas avoir lieu; alors les déterminations qui réſultent de cette condition ne ſont plus néceſſaires.

9. Telles sont les équations par lesquelles on peut déterminer directement le mouvement d'un fluide quelconque incompressible. Mais ces équations sont sous une forme un peu compliquée, & il est possible de les réduire à une plus simple, en prenant pour inconnues, à la place des coordonnées x, y, z, les vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans la direction des coordonnées, & en regardant ces vîtesses comme des fonctions de x, y, z, t.

En effet, d'un côté il est clair que puisque x, y, z sont fonctions de a, b, c, t, les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, seront aussi fonctions des mêmes variables a, b, c, t; donc si on conçoît qu'on substitue dans ces fonctions les valeurs de a, b, c en x, y, z tirées de celles de x, y, z en a, b, c; on aura $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ exprimées en fonctions de x, y, z & t.

D'un autre côté, il est clair que pour la connoissance actuelle du mouvement du fluide, il suffit de connoître à chaque instant le mouvement d'une particule quelconque qui occupe un lieu donné dans l'espace, sans qu'il soit nécessaire de savoir les états précédens de cette particule; par conséquent il suffit d'avoir les valeurs des vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en fonctions de x, y, z, t.

D'ailleurs ces valeurs étant connues, si on les nomme p, q, r, on aura les équations $dx = p\,dt$, $dy = q\,dt$, $dz = r\,dt$, entre x, y, z, t; lesquelles étant ensuite intégrées, de maniere que x, y, z deviennent a, b, c, lorsque $t = 0$, donneront les valeurs mêmes de x, y, z, en a, b, c, t.

Au reste, si on chasse dt de ces équations différentielles, on aura ces deux-ci $p\,dy = q\,dx$, $p\,dz = r\,dx$, lesquelles expriment la nature des différentes courbes dans lesquelles tout le fluide se meut à chaque instant, courbes qui changent de place & de forme d'un instant à l'autre.

10. Reprenons donc les équations fondamentales (A) & (B) des articles 2 & 3, & introduisons-y les variables $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$, $r = \frac{dz}{dt}$, regardées comme des fonctions de x, y, z, t.

Il est clair que les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ peuvent être mises sous la forme $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}$, $\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}$, $\frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt}$, où les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont censées des fonctions de a, b, c, t.

En les regardant donc comme telles, on aura pour la différence complette de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}dt + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{da}da + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{db}db + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{dc}dc$, & ainsi des autres; mais en les regardant comme fonctions de x, y, z, t, & les désignant par p, q, r, leurs différences complettes seront $\frac{dp}{dt}dt + \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$, & ainsi des autres différences; donc si dans ces dernieres expressions on met pour dx, dy, dz leurs valeurs en a, b, c, t, il faudra

qu'elles deviennent identiques avec les premieres; mais x étant regardé comme fonction de a, b, c, t, on a $dx = \frac{dx}{dt} dt + \frac{dx}{da} da + \frac{dx}{db} db + \frac{dx}{dc} dc$, où $\frac{dx}{dt}$ est évidemment $= p$, en supposant qu'on mette dans p, les valeurs de x, y, z, en a, b, c, t.

Ainsi on aura $dx = p dt + \frac{dx}{da} da +$ &c; & de même $dy = q dt + \frac{dy}{da} da +$ &c, $dz = r dt + \frac{dz}{da} da +$ &c.

Substituant ces valeurs dans l'expression de la différence complette de $\frac{dx}{dt}$, les termes affectés de dt seront $\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dx} p + \frac{dp}{dy} q + \frac{dp}{dz} r\right) dt$ lesquels devant être identiques avec le terme correspondant $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt} dt$, ou bien $\frac{d^2 x}{dt^2} dt$, on aura

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} + p \frac{dp}{dx} + q \frac{dp}{dy} + r \frac{dp}{dz};$$

& l'on trouvera de la même maniere

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dq}{dt} + p \frac{dq}{dx} + q \frac{dq}{dy} + r \frac{dq}{dz},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dr}{dt} + p \frac{dr}{dx} + q \frac{dr}{dy} + r \frac{dr}{dz}.$$

On fera donc ces substitutions dans les équations (A); & comme dans ces mêmes équations les termes $\frac{d\lambda}{Dx}$, $\frac{D\lambda}{Dy}$, $\frac{D\lambda}{Dz}$ représentent des différences partielles de λ, relative-

ment à x, y, z, en ſuppoſant t conſtant, on y pourra changer la caractériſtique D en d.

On aura ainſi les transformées

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{dp}{dt}+p\frac{dp}{dx}+q\frac{dp}{dy}+r\frac{dp}{dz}+X\right)-\frac{d\lambda}{dx}=0\\
&\Delta\left(\frac{dq}{dt}+p\frac{dq}{dx}+q\frac{dq}{dy}+r\frac{dq}{dz}+Y\right)-\frac{d\lambda}{dx}=0\\
&\Delta\left(\frac{dr}{dt}+p\frac{dr}{dx}+q\frac{dr}{dy}+r\frac{dr}{dz}+Z\right)-\frac{d\lambda}{dz}=0
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (F).$$

A l'égard de l'équation (B) de l'article 3, il n'y aura qu'à y mettre à la place de dx, dy, dz, leurs valeurs pdt, qdt, rdt, & changeant la caractériſtique D en d, on aura ſur le champ, à cauſe de dt conſtant,

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (G).$$

On voit que ces équations ſont beaucoup plus ſimples que les équations (C) ou (D) & (E) auxquelles elles répondent; ainſi il convient de les employer de préférence dans la théorie des fluides.

11. Dans les fluides homogènes & de denſité uniforme, la quantité Δ qui exprime la denſité, eſt tout-à-fait conſtante; c'eſt le cas le plus ordinaire, & le ſeul que nous examinerons dans la ſuite.

Mais dans les fluides hétérogenes, cette quantité doit être une fonction conſtante relativement au tems t pour la même particule, mais variable d'une particule à l'autre, ſelon une loi donnée. Ainſi en conſidérant le fluide dans l'état initial, où les coordonnées x, y, z ſont a, b, c, la

quantité Δ ſera une fonction donnée & connue de a, b, c, ſans t; par conſéquent le terme affecté de dt dans la différentielle complette de Δ regardée comme fonction de a, b, c, t devra être nul; mais par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons dans l'article précédent pour trouver la valeur de $\frac{d^2 x}{d t^2}$, on trouvera qu'en regardant Δ comme une fonction de x, y, z, t, le terme dont il s'agit ſera exprimé par

$$\left(\frac{d\Delta}{dt} + p\frac{d\Delta}{dx} + q\frac{d\Delta}{dy} + r\frac{d\Delta}{dz}\right) dt.$$

Ainſi on aura l'équation

$$\frac{d\Delta}{dt} + p\frac{d\Delta}{dx} + q\frac{d\Delta}{dy} + r\frac{d\Delta}{dz} = 0 \;.\;. (H).$$

qui ſervira à déterminer l'inconnue Δ, dans les équations (F), parce que dans ces équations on doit traiter Δ comme une fonction de x, y, z, t.

A cet égard elles ſont moins avantageuſes que les équations (C) ou (D) dans leſquelles on peut regarder Δ comme une fonction connue de a, b, c.

12. Ce que nous venons de dire relativement à la fonction Δ, il faudra l'appliquer auſſi à la fonction A, en tant que $A = 0$, eſt l'équation des parois du vaſe. Car la condition que les mêmes particules reſtent toujours à la ſurface demande, comme on l'a vu dans l'article 8, que A devienne une fonction de a, b, c ſans t; de ſorte qu'en regardant cette quantité comme une fonction de x, y, z, t, on aura auſſi l'équation

$$\frac{dA}{dt} + p\frac{dA}{dx} + q\frac{dA}{dy} + r\frac{dA}{dz} = 0 \ldots (I).$$

Pour les parties de la ſurface où le fluide ſera libre, on aura l'équation $\lambda = 0$ (art. 2); il faudra, par conſéquent, pour ſatisfaire à la même condition, que l'on ait auſſi

$$\frac{d\lambda}{dt} + p\frac{d\lambda}{dx} + q\frac{d\lambda}{dy} + r\frac{d\lambda}{dz} = 0 \ldots (K).$$

13. Voilà les formules les plus générales & les plus ſimples pour la détermination rigoureuſe du mouvement des fluides. La difficulté ne conſiſte plus que dans leur intégration; mais elle eſt ſi grande que juſqu'à préſent on a été obligé de ſe contenter, même dans les problêmes les plus ſimples, de méthodes particulieres & fondées ſur des hypothèſes plus ou moins limitées. Pour diminuer autant qu'il eſt poſſible cette difficulté, nous allons examiner comment & dans quels cas ces formules peuvent encore être ſimplifiées; nous en ferons enſuite l'application à quelques queſtions ſur le mouvement des fluides dans des vaſes ou des canaux.

14. Rien n'eſt d'abord plus facile que de ſatisfaire à l'équation (G) de l'article 10; car en faiſant $p = \frac{d\alpha}{dz}$, $q = \frac{d\beta}{dz}$, elle devient $\frac{d^2\alpha}{dx\,dz} + \frac{d^2\beta}{dy\,dz} + \frac{dr}{dz} = 0$, laquelle eſt intégrable relativement à z, & donne $r = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}$; il n'eſt point néceſſaire d'ajouter ici une fonction arbitraire, à cauſe des quantités indéterminées α & β.

Ainſi l'équation dont il s'agit ſera ſatisfaite par ces valeurs

$$p = \frac{d\alpha}{dz},\ q = \frac{d\beta}{dz},\ r = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy},$$

lesquelles étant ensuite substituées dans les trois équations (F) du même article, il n'y aura plus que trois inconnues α, β, & λ; & même il sera très-facile d'éliminer λ par des différentiations partielles. De sorte que de cette maniere, si la densité Δ est constante, le problême se trouvera réduit à deux équations uniques entre les inconnues α & β; & si la densité Δ est variable, il y faudra joindre l'équation (H) de l'article 11. Mais l'intégration de ces équations surpasse les forces de l'analyse connue.

15. Voyons donc si les équations (F) considérées en elles-mêmes, ne sont pas susceptibles de quelque simplification.

En ne considérant dans la fonction λ que la variabilité de x, y, z, on a $d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}\,dx + \frac{d\lambda}{dy}\,dy + \frac{d\lambda}{dz}\,dz$.

Donc substituant pour $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d\lambda}{dy}$, $\frac{d\lambda}{dz}$, leurs valeurs tirées de ces équations, on aura

$$\begin{aligned} d\lambda = {} & \left(\frac{dp}{dt} + p\,\frac{dp}{dx} + q\,\frac{dp}{dy} + r\,\frac{dp}{dz} + X\right)\Delta\,dx \\ & + \left(\frac{dq}{dt} + p\,\frac{dq}{dx} + q\,\frac{dq}{dy} + r\,\frac{dq}{dz} + Y\right)\Delta\,dy \\ & + \left(\frac{dr}{dt} + p\,\frac{dr}{dx} + q\,\frac{dr}{dy} + r\,\frac{dr}{dz} + Z\right)\Delta\,dz. \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation étant une différentielle complette, il faudra que le second en soit une aussi relativement

relativement à x, y, z; & la valeur de λ qu'on en tirera, ſatisfera à la fois aux trois équations (F).

Suppoſons maintenant que le fluide ſoit homogène, enſorte que la denſité Δ ſoit conſtante; & faiſons-la, pour plus de ſimplicité, égale à l'unité.

Suppoſons de plus que les forces accélératrices X, Y, Z, ſoient telles que la quantité $Xdx + Ydy + Zdz$ ſoit une différentielle complette. Cette condition eſt celle qui eſt néceſſaire pour que le fluide puiſſe être en équilibre par ces mêmes forces, comme on l'a vu dans l'article 17 de la Section ſeptieme de la premiere Partie. Elle a d'ailleurs toujours lieu, lorſque ces forces viennent d'une ou de pluſieurs attractions proportionnelles à des fonctions quelconques des diſtances aux centres, ce qui eſt le cas de la nature, puiſqu'en nommant les attractions P, Q, R, &c, & les diſtances p, q, r, &c, on a en général $Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr +$ &c, (Part. I, Sect. V, art. 5).

Faiſant donc $\Delta = 1$, & $Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr +$ &c $= dV$, l'équation précédente deviendra

$$d\lambda - dV = \left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz}\right)dx$$
$$+ \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz}\right)dy$$
$$+ \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz}\right)dz \; . \; . \; . \; (L);$$

& il faudra que le ſecond membre de cette équation ſoit une différentielle complette, puiſque le premier en eſt une.

Cette équation équivaudra ainsi aux équations (F) de l'article 10.

Or en considérant la différentielle de $\frac{p^2+q^2+r^2}{2}$ prise relativement à x, y, z, il n'est pas difficile de voir qu'on peut donner au second membre de l'équation dont il s'agit, cette forme,

$$\frac{d.(p^2+q^2+r^2)}{2}+\frac{dp}{dt}dx+\frac{dq}{dt}dy+\frac{dr}{dt}dz$$

$$+\left(\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}\right)(q\,dx-p\,dy)+\left(\frac{dp}{dz}-\frac{dr}{dx}\right)(r\,dx-p\,dz)$$

$$+\left(\frac{dq}{dz}-\frac{dr}{dy}\right)(r\,dy-q\,dz);$$

& on voit d'abord que cette quantité sera une différentielle complette toutes les fois que $p\,dx+q\,dy+r\,dz$ le sera elle-même; car alors sa différentielle par rapport à t, savoir, $\frac{dp}{dt}dx+\frac{dq}{dt}dy+\frac{dr}{dt}dz$ le sera aussi, & de plus les conditions connues de l'intégrabilité, donneront . . .
$\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}=0$, $\frac{dp}{dz}-\frac{dr}{dx}=0$, $\frac{dq}{dz}-\frac{dr}{dy}=0$.

D'où il s'ensuit qu'on pourra satisfaire à l'équation (L) par la simple supposition que $p\,dx+q\,dy+r\,dz$ soit une différentielle complette; & le calcul du mouvement du fluide sera par-là beaucoup simplifié. Mais comme ce n'est qu'une supposition particuliere, il importe d'examiner avant tout, dans quels cas elle peut & doit avoir lieu.

17. Soit pour abréger

$$\alpha=\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx},\ \beta=\frac{dp}{dz}-\frac{dr}{dx},\ \gamma=\frac{dq}{dz}-\frac{dr}{dy};$$

il ne s'agira que de rendre une différentielle exacte la quantité

$$\frac{dp}{dt}\,dx + \frac{dq}{dt}\,dy + \frac{dr}{dt}\,dz + \alpha\,(q\,dx - p\,dy)$$

$$+ \beta\,(r\,dx - p\,dz) + \gamma\,(r\,dy - q\,dz).$$

Supposons d'abord que la variable t ait une valeur fort petite, on pourra alors donner à p, q, r, les formes suivantes en série,

$$p = p' + p'' t + p''' t^2 + p^{IV} t^3 + \&c,$$

$$q = q' + q'' t + q''' t^2 + q^{IV} t^3 + \&c,$$

$$r = r' + r'' t + r''' t^2 + r^{IV} t^3 + \&c,$$

dans lesquelles les quantités p', p'', p''', &c ; q', q'', q''', &c, r', r'', r''', &c, seront des fonctions de x, y, z sans t.

Ces valeurs étant substituées dans les trois quantités α, β, γ, elles deviendront

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' t + \alpha''' t^2 + \alpha^{IV} t^3 + \&c,$$

$$\beta = \beta' + \beta'' t + \beta''' t^2 + \beta^{IV} t^3 + \&c,$$

$$\gamma = \gamma' + \gamma'' t + \gamma''' t^2 + \gamma^{IV} t^3 + \&c,$$

en supposant

$$\alpha' = \frac{dp'}{dy} - \frac{dq'}{dx},\ \alpha'' = \frac{dp''}{dy} - \frac{dq''}{dx},\ \&c,$$

$$\beta' = \frac{dp'}{dz} - \frac{dr'}{dx},\ \beta'' = \frac{dp''}{dz} - \frac{dr''}{dx},\ \&c,$$

$$\gamma' = \frac{dq'}{dz} - \frac{dr'}{dy},\ \gamma'' = \frac{dq''}{dz} - \frac{dr''}{dy},\ \&c,$$

Ainsi la quantité $\frac{dp}{dt}\, dx + \frac{dq}{dt}\, dy + \frac{dr}{dt}\, dz$ $+ \alpha(q\,dx - p\,dy) + \beta(r\,dx - p\,dz) + \gamma(r\,dy - q\,dz)$ deviendra après ces différentes substitutions, & en ordonnant les termes par rapport aux puissances de t,

$$p''\,dx + q''\,dy + r''\,dz +$$
$$\alpha'(q'\,dx - p'\,dy) + \beta'(r'\,dx - p'\,dz) + \gamma'(r'\,dy - q'\,dz)$$
$$+ t\,(2\,(p'''\,dx + q'''\,dy + r'''\,dz) +$$
$$\alpha'(q''\,dx - p''\,dy) + \beta'(r''\,dx - p''\,dz) + \gamma'(r''\,dy - q''\,dz) +$$
$$\alpha''(q'\,dx - p'\,dy) + \beta''(r'\,dx - p'\,dz) + \gamma''(r'\,dy - q'\,dz))$$
$$+ t^2\,(3\,(p^{IV}\,dx + q^{IV}\,dy + r^{IV}\,dz) +$$
$$\alpha'(q'''\,dx - p'''\,dy) + \beta'(r'''\,dx - p'''\,dz) + \gamma'(r'''\,dy - q'''\,dz) +$$
$$\alpha''(q''\,dx - p''\,dy) + \beta''(r''\,dx - p''\,dz) + \gamma''(r''\,dy - q''\,dz) +$$
$$\alpha'''(q'\,dx - p'\,dy) + \beta'''(r'\,dx - p'\,dz) + \gamma'''(r'\,dy - q'\,dz))$$
$+$ &c ;

& comme cette quantité doit être une différentielle exacte indépendamment de la valeur de t, il faudra que les quantités qui multiplient chaque puissance de t, soient chacune en particulier une différentielle exacte.

Cela posé, supposons que $p'\,dx + q'\,dy + r'\,dz$ soit une différentielle exacte, on aura, par les théorêmes connus,

$$\frac{dp'}{dy} = \frac{dq'}{dx},\ \frac{dp'}{dz} = \frac{dr'}{dx},\ \frac{dq'}{dz} = \frac{dr'}{dy};$$

donc $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$; donc la premiere quantité

qui doit être une différentielle exacte, se réduira à $p'' dx + q'' dy + r'' dz$; & l'on aura par conséquent ces équations de condition $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 0$.

Alors la seconde quantité qui doit être une différentielle exacte, deviendra $2(p''' dx + q''' dy + r''' dz)$; & il résultera de-là les nouvelles équations $\alpha''' = 0$, $\beta''' = 0$, $\gamma''' = 0$. De sorte que la troisieme quantité qui doit être une différentielle exacte, sera $3(p^{IV} dx + q^{IV} dy + r^{IV} dz)$; d'où l'on tirera pareillement les équations $\alpha^{IV} = 0$, $\beta^{IV} = 0$, $\gamma^{IV} = 0$; & ainsi de suite. Donc si $p' dx + q' dy + r' dz$ est une différentielle exacte, il faudra que $p'' dx + q'' dy + r'' dz$, $p''' dx + q''' dy + r''' dz$, $p^{IV} dx + q^{IV} dy + r^{IV} dz$, &c, soient aussi chacune en particulier des différentielles exactes. Par conséquent la quantité entiere $p dx + q dy + r dz$ sera dans ce cas une différentielle exacte, le tems t étant supposé fort petit.

17. Il s'ensuit de-là que si la quantité $p dx + q dy + r dz$ est une différentielle exacte lorsque $t = 0$, elle devra l'être aussi lorsque t aura une valeur quelconque très-petite; d'où l'on peut conclure en général que cette quantité devra être toujours une différentielle exacte, quelle que soit la valeur de t. Car puisqu'elle doit l'être depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$, (θ étant une quantité quelconque donnée très-petite) si on y substitue par-tout $\theta + t'$ à la place de t, on prouvera de même qu'elle devra être une différentielle exacte, depuis $t' = 0$, jusqu'à $t' = \theta$; par conséquent elle le sera depuis $t = 0$, jusqu'à $t = 2\theta$; & ainsi de suite.

Donc en général, comme l'origine des t est arbitraire, & qu'on peut prendre également t positif ou négatif, il

s'enſuit que ſi la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ eſt une différentielle exacte dans un inſtant quelconque, elle devra l'être pour tous les autres inſtans. Par conſéquent, s'il y a un ſeul inſtant dans lequel elle ne ſoit pas une différentielle exacte, elle ne pourra jamais l'être pendant tout le mouvement; car ſi elle l'étoit dans un autre inſtant quelconque, elle devroit l'être auſſi dans le premier.

18. Lorſque le mouvement commence du repos, on a alors $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, lorſque $t = 0$; donc $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ſera intégrable pour ce moment, & par conſéquent devra l'être toujours pendant toute la durée du mouvement.

Mais s'il y a des vîteſſes imprimées au fluide, au commencement, tout dépend de la nature de ces vîteſſes, ſelon qu'elles ſeront telles que $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ſoit une quantité intégrable ou non; dans le premier cas la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ſera toujours intégrable; dans le ſecond elle ne le ſera jamais.

Lorſque les vîteſſes initiales ſont produites par une impulſion quelconque ſur la ſurface du fluide, comme par l'action d'un piſton, on peut démontrer que $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ doit être intégrable dans le premier inſtant. Car il faut que les vîteſſes p, q, r, que chaque point du fluide reçoit en vertu de l'impulſion donnée à la ſurface, ſoient telles que ſi on détruiſoit ces vîteſſes, en imprimant en même-tems à chaque point du fluide des vîteſſes égales & en ſens contraire, toute la maſſe du fluide demeurât en repos ou en équilibre. Donc il faudra qu'il y ait équilibre dans cette maſſe, en vertu de l'impulſion appliquée à la

ſurface, & des vîteſſes ou forces $-p$, $-q$, $-r$, appliquées à chacun des points de ſon intérieur; par conſéquent, d'après la loi générale de l'équilibre des fluides (Partie premiere, Section ſeptieme, article 17), les quantités p, q, r, devront être telles, que $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ſoit une différentielle exacte. Ainſi dans ce cas la même quantité devra toujours être une différentielle exacte dans chaque inſtant du mouvement.

19. On pourroit peut-être douter s'il y a des mouvemens poſſibles dans un fluide, pour leſquels $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ne ſoit pas une différentielle exacte.

Pour lever ce doute par un exemple très-ſimple, il n'y a qu'à conſidérer le cas où l'on auroit $p = gy$, $q = -gx$, $r = 0$, g étant une conſtante quelconque. On voit d'abord que dans ce cas $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ne ſera pas une différentielle complette, puiſqu'elle devient $g\,(y\,dx - x\,dy)$ qui n'eſt pas intégrable; cependant l'équation (L) de l'article 15 ſera intégrable d'elle-même; car on aura $\frac{dp}{dy} = g$, $\frac{dq}{dx} = -g$, & toutes les autres différences partielles de p & q ſeront nulles; de ſorte que l'équation dont il s'agit deviendra

$$d\lambda - dV = -g^2\,(x\,dx + y\,dy),$$

dont l'intégrale donne

$\lambda = V - \frac{g^2}{2}\,(x^2 + y^2) +$ fonct. t, valeur qui ſatisfera donc aux trois équations (F) de l'article 10.

A l'égard de l'équation (G) du même article, elle aura

lieu auſſi, puiſque les valeurs ſuppoſées donnent $\frac{dp}{dx} = 0$, $\frac{dq}{dy} = 0$, $\frac{dr}{dz} = 0$.

Au reſte, il eſt viſible que ces valeurs de p, q, r repréſentent le mouvement d'un fluide qui tourne autour de l'axe fixe des coordonnées z, avec une vîteſſe angulaire conſtante & égale à g; & l'on ſait qu'un pareil mouvement peut toujours avoir lieu dans un fluide.

On peut conclure de-là que dans le calcul des oſcillations de la mer, en vertu de l'attraction du Soleil & de la Lune, on ne peut pas ſuppoſer que la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ſoit intégrable, puiſqu'elle ne l'eſt pas, lorſque le fluide eſt en repos par rapport à la Terre, & qu'il n'a que le mouvement de rotation qui lui eſt commun avec elle.

20. Après avoir déterminé les cas dans leſquels on eſt aſſuré que la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ doit être une différentielle complette, voyons comment, d'après cette condition, on peut réſoudre les équations du mouvement des fluides.

Soit donc $p\,dx + q\,dy + r\,dz = d\varphi$, φ étant une fonction quelconque de x, y, z, & de la variable t, laquelle eſt regardée comme conſtante dans la différentielle $d\varphi$ on aura donc $p = \frac{d\varphi}{dx}$, $q = \frac{d\varphi}{dy}$, $r = \frac{d\varphi}{dz}$; & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (L) de l'article 15, elle deviendra

$$d\lambda - dV$$

$$= \left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dx} + \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right)dx,$$

$$+ \left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dy} + \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right)dy,$$

+

$$+\left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dz}+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dz;$$

dont l'intégrale relativement à x, y, z est évidemment

$$\lambda - V = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

On pourroit y ajouter une fonction arbitraire de t, puisque cette variable est regardée dans l'intégration comme constante; mais j'observe que cette fonction peut être censée renfermée dans la valeur de φ; car en augmentant φ d'une fonction quelconque T de t, les valeurs de p, q, r demeurent les mêmes qu'auparavant, & le second membre de l'équation précédente se trouvera augmenté de la fonction $\frac{dT}{dt}$, qui est arbitraire. On peut donc sans déroger à la généralité de cette équation, se dispenser d'y ajouter aucune fonction arbitraire de t.

On aura donc par cette équation,

$$\lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

valeur qui satisfera à la fois aux trois équations (F) de l'article 10; & la détermination de φ dépendra de l'équation (G) du même article, laquelle, en substituant pour p, q, r, leurs valeurs $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ devient

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Ainsi toute la difficulté ne consistera plus que dans l'intégration de cette derniere équation.

21. Il y a encore un cas très-étendu, dans lequel la

quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ doit être une différentielle exacte; c'eſt celui où l'on ſuppoſe que les vîteſſes p, q, r, ſoient très-petites, & qu'on néglige les quantités très-petites du ſecond ordre & des ordres ſuivans. Car il eſt viſible que dans cette hypothèſe, la même équation (L) ſe réduira à

$$d\lambda - dV = \frac{dp}{dt}\,dx + \frac{dq}{dt}\,dy + \frac{dr}{dt}\,dz,$$

où l'on voit que $\frac{dp}{dt}\,dx + \frac{dq}{dt}\,dy + \frac{dr}{dt}dz$, devant être intégrable relativement à x, y, z, la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ devra l'être auſſi. On aura ainſi les mêmes formules que dans l'article précédent, en ſuppoſant φ une fonction très-petite, & négligeant les ſecondes dimenſions de φ & de ſes différentielles.

On pourra de plus, dans ce cas, déterminer les valeurs mêmes de x, y, z pour un tems quelconque. Car il n'y aura pour cela qu'à intégrer les équations $dx = p\,dt$, $dy = q\,dt$, $dz = r\,dt$ (art. 9), dans leſquelles, puiſque p, q, r ſont très-petites, & que par conſéquent dx, dy, dz ſont auſſi très-petites du même ordre vis-à-vis de dt, on pourra regarder x, y, z comme conſtantes par rapport à t. De ſorte qu'en traitant t ſeule comme variable dans les fonctions p, q, r, & ajoutant les conſtantes a, b, c, on aura ſur le champ $x = a + \int p\,dt$, $y = b + \int q\,dt$, $z = c + \int r\,dt$. Donc faiſant pour abréger $\Phi = \int \varphi\,dt$, & changeant dans Φ les variables x, y, z en a, b, c, on aura ſimplement

$$x = a + \frac{d\Phi}{da},\ y = b + \frac{d\Phi}{db},\ z = c + \frac{d\Phi}{dc},$$

où la fonction Φ devra être priſe de maniere qu'elle ſoit

nulle lorſque $t = 0$, afin que a, b, c ſoient les valeurs initiales de x, y, z.

Ce cas a lieu, ſur-tout dans la théorie des ondes, comme on le verra plus bas.

22. Au reſte, ſi la maſſe du fluide étoit telle que l'une de ſes dimenſions fût conſidérablement plus petite que chacune des deux autres, enſorte qu'on pût regarder, par exemple, les coordonnées z comme très-petites vis-à-vis de x & y, cette circonſtance ſerviroit auſſi à faciliter la réſolution des équations générales.

Car il eſt clair qu'on pourroit donner alors aux inconnues p, q, r, Δ la forme ſuivante,

$$p = p' + p'' z + p''' z^2 + \&c,$$

$$q = q' + q'' z + q''' z^2 + \&c,$$

$$r = r' + r'' z + r''' z^2 + \&c,$$

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' z + \Delta''' z^2 + \&c,$$

dans leſquelles p', p'', &c; q', q'', &c; r', r'', &c; Δ', Δ'', &c, ſeroient des fonctions de x, y, t ſans z; de ſorte qu'en faiſant ces ſubſtitutions, on auroit des équations en ſéries, leſquelles ne contiendroient que des différences partielles relatives à x, y, t.

Pour donner là-deſſus un eſſai de calcul, ſuppoſons de nouveau qu'il ne s'agiſſe que d'un fluide homogène, où $\Delta = 1$; & commençons par ſubſtituer les valeurs précédentes dans l'équation (G) de l'article 10; ordonnant les termes par rapport à z, on aura

$$0 = \frac{dp'}{dx} + \frac{dq'}{dy} + r''$$
$$+ z\left(\frac{dp''}{dx} + \frac{dq''}{dy} + 2r'''\right)$$
$$+ z^2\left(\frac{dp'''}{dx} + \frac{dq'''}{dy} + 3r^{IV}\right)$$
$$+ \&c.$$

De ſorte que, comme p', p'', &c; q', q'', &c, ne doivent point contenir z, on aura ces équations particulieres,

$$\frac{dp'}{dx} + \frac{dq'}{dy} + r'' = 0,$$
$$\frac{dp''}{dx} + \frac{dq''}{dy} + 2r''' = 0,$$
$$\frac{dp'''}{dx} + \frac{dq'''}{dy} + 3r^{IV} = 0,$$
&c,

par leſquelles on déterminera d'abord les quantités r'', r''', r^{IV}, &c, & les autres quantités r', p', p'', &c, q', q'', &c, demeureront encore indéterminées.

On fera les mêmes ſubſtitutions dans l'équation (L) de l'article 15, laquelle équivaut aux trois équations (F) de l'article 10, & il eſt aiſé de voir qu'elle ſe réduira à la forme ſuivante,

$$d\lambda - dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + z(\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz)$$
$$+ z^2(\alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz) + \&c.$$

en faiſant pour abréger

$$\alpha = \frac{dp'}{dt} + p'\frac{dp'}{dx} + q'\frac{dp''}{dy} + r'p'',$$

$$\beta = \frac{dq'}{dt} + p'\frac{dq'}{dx} + q'\frac{dq'}{dy} + r'q'',$$

$$\gamma = \frac{dr'}{dt} + p'\frac{dr'}{dx} + q'\frac{dr'}{dy} + r'r'',$$

$$\alpha' = \frac{dp''}{dt} + p'\frac{dp''}{dx} + p''\frac{dp'}{dx} + q'\frac{dp''}{dy} + q''\frac{dp'}{dy}$$
$$+ 2r'p''' + r''p'',$$

$$\beta' = \frac{dq''}{dt} + p'\frac{dq''}{dx} + p''\frac{dq'}{dx} + q'\frac{dq''}{dy} + q''\frac{dq'}{dy}$$
$$+ 2r'q''' + r''q'',$$

$$\gamma' = \frac{dr''}{dt} + p'\frac{dp''}{dx} + p''\frac{dr'}{dx} + q'\frac{dr'}{dy} + q''\frac{dr'}{dy}$$
$$+ 2r'r''' + r''r'',$$

& ainſi de ſuite.

Donc pour que le ſecond membre de cette équation ſoit intégrable, il faudra que les quantités

$$\alpha dx + \beta dy,$$
$$\gamma dz + z(\alpha' dx + \beta' dy)$$
$$\gamma' z dz + z^2(\alpha'' dx + \beta'' dy)$$
&c,

ſoient chacune intégrable en particulier.

Si donc on dénote par ω une fonction de x, y, t ſans z, on aura ces conditions

$$\alpha = \frac{d\omega}{dx},\ \beta = \frac{d\omega}{dy},\ \alpha' = \frac{d\gamma}{dx},\ \beta' = \frac{d\gamma}{dy},$$

$$\alpha'' = \frac{d\gamma'}{2dx},\ \beta'' = \frac{d\gamma'}{2dy},\ \text{\&c.}$$

Alors l'équation intégrée donnera

$$\lambda = V + \omega + \gamma z + \frac{1}{2}\gamma' z^2 + \&c;$$

& il ne s'agira que de ſatisfaire aux conditions précédentes, par le moyen des fonctions indéterminées ω, r', p', p'' &c, q', q'', &c.

Le calcul deviendroit plus facile encore, ſi les deux variables y & z étoient très-petites en même-tems, vis-à-vis de x; car on pourroit ſuppoſer alors,

$$p = p' + p''y + p'''z + p^{IV}y^2 + p^{V}yz + \&c,$$

$$q = q' + q''y + q'''z + q^{IV}y^2 + q^{V}yz + \&c,$$

$$r = r' + r''y + r'''z + r^{IV}y^2 + r^{V}yz + \&c,$$

les quantités p', p'', &c, q', q'', &c, r', r'', étant de ſimples fonctions de x.

Faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation (G), & égalant ſéparément à zéro les termes affectés de y, z & de leurs produits, on auroit

$$\frac{dp'}{dx} + q'' + r''' = 0,$$

$$\frac{dp''}{dx} + 2q^{IV} + r^{V} = 0,$$

&c.

Enſuite l'équation (L) deviendroit de la forme

$$d\lambda - dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + y(\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz) + z(\alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz) + \&c.$$

en ſuppoſant

$$\alpha = \frac{dp'}{dt} + p' \frac{dp'}{dx} + q'p'' + r'p''',$$

$$\beta = \frac{dq'}{dt} + p' \frac{dq'}{dx} + q'q'' + r'q''',$$

$$\gamma = \frac{dr'}{dt} + p' \frac{dr'}{dx} + q'r'' + r'r'''$$

$$\alpha' = \frac{dp''}{dt} + p' \frac{dp''}{dx} + p'' \frac{dp'}{dx} + 2q'p^{IV} + q''p'' + r'p^{V} + r''p''',$$

&c,

& l'on auroit pour l'intégrabilité de cette équation, les conditions $\alpha' = \frac{d\beta}{dx}$, $\alpha'' = \frac{d\gamma}{dx}$, &c, moyennant quoi elle donneroit

$$\lambda = V + \int \alpha\, dx + \beta y + \gamma z + \&c.$$

Enfin on pourra auſſi quelquefois ſimplifier le calcul par le moyen des ſubſtitutions, en introduiſant à la place des coordonnées x, y, z d'autres variables ξ, η, ζ, leſquelles ſoient des fonctions données de celles-là; & ſi par la nature de la queſtion, la variable ζ, par exemple, ou les deux variables η & ζ ſont très-petites vis-à-vis de ξ, on pourra employer des réductions analogues à celles que nous venons d'expoſer.

§. II.

Du mouvement des fluides peſans & homogènes dans des vaſes ou canaux de figure quelconque.

23. Pour montrer l'uſage des principes & des formules que nous venons de donner, nous allons les appliquer aux

fluides qui ſe meuvent dans des vaſes ou des canaux de figure donnée.

Nous ſuppoſerons que le fluide ſoit homogène & peſant, & qu'il parte du repos, ou qu'il ſoit mis en mouvement par l'impulſion d'un piſton appliqué à ſa ſurface; ainſi les vîteſſes p, q, r, de chaque particule, devront être telles que la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ ſoit intégrable (art. 18); par conſéquent on pourra employer les formules de l'article 20.

Soit donc φ une fonction de x, y, z & t, déterminée par l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

on aura d'abord pour les vîteſſes de chaque particule, ſuivant les directions des coordonnées x, y, z, ces expreſſions,

$$p = \frac{d\varphi}{dx},\; q = \frac{d\varphi}{dy},\; r = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Enſuite on aura

$$\lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

quantité qui devra être nulle à la ſurface extérieure libre du fluide (art. 2).

Quant à la valeur de V qui dépend des forces accélératrices du fluide (art. 15), ſi on exprime par g la force accélératrice de la gravité, & qu'on nomme ξ, η, ζ les angles que les axes des coordonnées x, y, z font avec la verticale menée du point d'interſection de ces axes, & dirigée de haut en bas, on aura $X = -g \cos \xi$, $Y = -g \cos \eta$,

Z

$Z = -g \cos \zeta$; je donne le ſigne — aux valeurs des forces X, Y, Z, parce que ces forces ſont ſuppoſées tendre à diminuer les coordonnées x, y, z. Donc puiſque $dV = Xdx + Ydy + Zdz$, on aura en intégrant,

$$V = -gx \cos \xi - gy \cos \eta - gz \cos \zeta.$$

24. Soit maintenant $z = \alpha$, ou $z - \alpha = 0$, l'équation d'une des parois du canal, α étant une fonction donnée de x, y, ſans z ni t. Pour que les mêmes particules du fluide ſoient toujours contiguës à cette paroi, il faudra remplir l'équation (I) de l'article 12, en y ſuppoſant $A = z - \alpha$. On aura donc

$$\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \times \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

équation à laquelle devra ſatisfaire la valeur $z = \alpha$. Chaque paroi fournira auſſi une équation ſemblable.

De même puiſque $\lambda = 0$ eſt l'équation de la ſurface extérieure du fluide, pour que les mêmes particules ſoient conſtamment dans cette ſurface, on aura l'équation

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} \times \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \times \frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \times \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

laquelle devra avoir lieu, & donner par conſéquent une même valeur de z que l'équation $\lambda = 0$. Mais cette équation ne ſera plus néceſſaire dès que la condition dont il s'agit ceſſera d'avoir lieu.

25. Cela poſé, il faut commencer par déterminer la fonction φ. Or l'équation d'où elle dépend n'étant intégrable en général par aucune méthode connue, nous ſuppoſerons que l'une des dimenſions de la maſſe fluide ſoit fort petite

vis-à-vis des deux autres, enſorte que les coordonnées z, par exemple, ſoient très-petites relativement à x & y. Par le moyen de cette ſuppoſition, on pourra repréſenter la valeur de φ par une ſérie de cette forme,

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' + z^2\varphi''' + z'''\varphi^{IV} + \&c,$$

où φ', φ'', φ''', &c, ſeront des fonctions de x, y, t ſans z.

Faiſant donc cette ſubſtitution dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + 2\varphi''' +$$

$$z\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2} + 2 \cdot 3\varphi^{IV}\right) +$$

$$z^2\left(\frac{d^2\varphi'''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'''}{dy^2} + 3 \cdot 4\varphi^{V}\right) + \&c = 0.$$

De ſorte qu'en égalant ſéparément à zero les termes affectés des différentes puiſſances de z, on aura

$$\varphi''' = -\frac{d^2\varphi'}{2\,dx^2} - \frac{d^2\varphi'}{2\,dy^2},$$

$$\varphi^{IV} = -\frac{d^2\varphi''}{2 \cdot 3\,dx^2} - \frac{d^2\varphi''}{2 \cdot 3\,dy^2},$$

$$\varphi^{V} = -\frac{d^2\varphi'''}{3 \cdot 4\,dx^2} - \frac{d^2\varphi'''}{3 \cdot 4\,dy^2},$$

$$= \frac{d^4\varphi'}{2 \cdot 3 \cdot 4\,dx^4} + \frac{d^4\varphi'}{3 \cdot 4\,dx^2\,dy^2} + \frac{d^4\varphi'}{2 \cdot 3 \cdot 4\,dy^4},$$

&c.

Ainſi l'expreſſion de φ deviendra

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right) - \frac{z^3}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right)$$

$$+\frac{z^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4\varphi'}{dx^4}+\frac{2\,d^4\varphi'}{dx^2\,dy^2}+\frac{d^4\varphi'}{dy^4}\right)+\&c,$$

dans laquelle les fonctions φ' & φ'' sont indéterminées, ce qui fait voir que cette expression est l'intégrale complette de l'équation proposée.

Ayant trouvé l'expression de φ, on aura par la différentiation, celles de p, q, r, comme il suit.

$$p=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi'}{dx}+z\frac{d\varphi''}{dx}-\frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}+\frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right)$$
$$-\frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi''}{dx^3}+\frac{d^3\varphi''}{dx\,dy^2}\right)+\&c.$$

$$q=\frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi'}{dy}+z\frac{d\varphi''}{dy}-\frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2\,dy}+\frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right)$$
$$-\frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi''}{dx^2\,dy}+\frac{d^3\varphi''}{dy^3}\right)+\&c,$$

$$r=\frac{d\varphi}{dz}=\varphi''-z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right)-\frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}+\frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right)$$
$$+\frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^4\varphi'}{dx^4}+\frac{2\,d^4\varphi'}{dx^2\,dy^2}+\frac{d^4\varphi'}{dy^4}\right)+\&c.$$

Et substituant ces valeurs dans l'expression de λ de l'article 23, elle deviendra de cette forme,

$$\lambda=\lambda'+z\lambda''+z^2\lambda'''+z^3\lambda^{IV}+\&c,$$

dans laquelle,

$$\lambda'=-g\,(x\cos\xi+y\cos\eta)+\frac{d\varphi'}{dt}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2+\frac{1}{2}\varphi''^2,$$

$$\lambda''=-g\cos\zeta+\frac{d\varphi''}{dt}+\frac{d\varphi'}{dx}\times\frac{d\varphi''}{dx}$$

$$+\frac{d\varphi'}{dy}\times\frac{d\varphi''}{dy}-\varphi''\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right),$$

$$\lambda^{(3)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dt\,dx^2}+\frac{d^3\varphi'}{dt\,dy^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\varphi'}{dx}\times\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}+\frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi''}{dy}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\varphi'}{dy}\times\frac{d^4\varphi'}{dx^2\,dy}+\frac{d^3\varphi'}{dy^3}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right)^2-\frac{1}{2}\varphi''\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}+\frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right)$$

$+$ &c.

& ainsi de suite.

26. Maintenant si $z=\alpha$ est l'équation des parois, α étant une fonction fort petite de x & y sans z, l'équation de condition pour que les mêmes particules soient toujours contiguës à ces parois (art. 24), deviendra par les substitutions précédentes,

$$\varphi''-\frac{d\varphi'}{dx}\times\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\varphi'}{dy}\times\frac{d\alpha}{dy}$$

$$-z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}+\frac{d^2\varphi''}{dx}\times\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d^2\varphi''}{dy}\times\frac{d\alpha}{dy}\right)$$

$$-\frac{1}{2}z^2\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}+\frac{d^2\varphi''}{dy^2}-\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}+\frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right)\frac{d\alpha}{dx}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2\,dy}+\frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right)\frac{d\alpha}{dy}\right)+\text{\&c.}=0.$$

laquelle devant avoir lieu, lorsqu'on fait $z=\alpha$, se réduira à cette forme plus simple,

$$\varphi'' - \frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dy}}{dy}$$

$$- \frac{d.\alpha^2\frac{d\varphi''}{2dx}}{2dx} - \frac{d.\alpha^2\frac{d\varphi''}{2dy}}{2dy}$$

$$+ \frac{d.\alpha^3\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right)}{2.3dx} + \frac{d.\alpha^3\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right)}{2.3dy}$$

$$+ \&c, = 0,$$

& il faudra que cette équation ſoit vraie dans toute l'étendue des parois données.

27. Enfin l'équation de la ſurface intérieure du fluide étant $\lambda = 0$, ſera de la forme

$$\lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda''' + z^3\lambda^{IV} + \&c. = 0;$$

& l'équation de condition pour que les mêmes particules demeurent à la ſurface (art. 24), ſera

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx}\times\frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\varphi'}{dy}\times\frac{d\lambda'}{dy} + \varphi''\lambda''$$

$$+ z\left(\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{d\varphi''}{dx}\times\frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\varphi'}{dx}\times\frac{d\lambda''}{dx} + \frac{d\varphi''}{dy}\times\frac{d\lambda'}{dy}\right.$$

$$\left. + \frac{d\varphi'}{dy}\times\frac{d\lambda''}{dy} + 2\varphi''\lambda'' - \left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right)\lambda''\right)$$

$$+ z^2\left(\frac{d\lambda'''}{dt} + \frac{d\varphi''}{dx}\times\frac{d\lambda''}{dx} + \frac{d\varphi'}{dx}\times\frac{d\lambda'''}{dx} + \frac{d\varphi''}{dy}\times\frac{d\lambda''}{dy}\right.$$

$$+ \frac{d\varphi'}{dy}\times\frac{d\lambda'''}{dy} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3} + \frac{d^3\varphi'}{dx\,dy^2}\right)\times\frac{d\lambda'}{dx}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\varphi'}{dy^3}\right)\times\frac{d\lambda'}{dy} - 2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right)\lambda'''$$

$$+ 3\varphi''\lambda^{IV} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2} + \frac{d^2\varphi''}{dy^2}\right)\lambda''\Big)$$

$$+ \&c. = 0.$$

Chaſſant z de ces deux équations, on en aura une qui devra ſubſiſter d'elle-même, pour tous les points de la ſurface extérieure.

APPLICATION *de ces formules au mouvement d'un fluide qui coule dans un vaſe étroit & preſque vertical.*

28. Imaginons maintenant que le fluide coule dans un vaſe étroit, & à-peu-près vertical, & ſuppoſons pour plus de ſimplicité, que les abſciſſes x ſoient verticales & diviſées de haut en bas, on aura (art. 23); $\xi = 0$, $\eta = 90^\circ$, $\zeta = 90^\circ$; donc $\cos \xi = 1$, $\cos \eta = 0$, $\cos \zeta = 0$.

Suppoſons de plus pour ſimplifier la queſtion autant qu'il eſt poſſible que le vaſe ſoit plan, enſorte que des deux ordonnées y & z, les premieres y ſoient nulles, & les ſecondes z ſoient fort petites.

Enfin, ſoient $z = \alpha$ & $z = \beta$, les équations des deux parois du vaſe, α & β étant des fonctions de x connues, & fort petites. On aura relativement à ces parois, les deux équations (art. 26).

$$\varphi'' - \frac{d.\alpha \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\alpha^2 \frac{d\varphi''}{dx}}{2dx} + \&c. = 0$$

$$\varphi'' - \frac{d.\beta \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\beta^2 \frac{d\varphi''}{dx}}{2dx} + \&c. = 0,$$

leſquelles ſerviront à déterminer les fonctions φ' & φ''.

Nous regarderons les quantités z, α, β, comme très-petites du premier ordre, & nous négligerons du moins dans la premiere approximation, les quantités du fecond ordre, & des ordres fuivans. Ainfi les deux équations précédentes fe réduiront à celles-ci,

$$\varphi'' - \frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = 0;\ \varphi'' - \frac{d.\beta\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = 0$$

lefquelles étant retranchées l'une de l'autre, donnent. . . $\frac{d.(\alpha-\beta)\frac{d\varphi}{dx}}{dx} = 0$, équation dont l'intégrale eft $\frac{(\alpha-\beta)\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} = \theta$, θ étant une fonction arbitraire de t, laquelle doit être très-petite du premier ordre.

Or il eft vifible que $\alpha - \beta$ eft la largeur horifontale du vafe que nous repréfenterons par γ. Ainfi on aura $\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{\theta}{\gamma}$, & intégrant de nouveau, par rappott à x, $\varphi' = \theta\frac{dx}{\gamma} + \vartheta$, en défignant par ϑ une nouvelle fonction arbitraire de t.

Si on ajoute enfemble les mêmes équations, & qu'on faffe $\frac{\alpha+\beta}{2} = \mu$, on en tirera $\varphi'' = \frac{d.\mu\frac{d\varphi'}{dx}}{dx}$, ou en fubftituant la valeur de $\frac{d\varphi'}{dx}$, $\varphi'' = \theta\frac{d.\frac{\mu}{\gamma}}{dx}$. D'où l'on voit que puifque γ, μ, θ font des quantités très-petites du premier ordre, φ'' fera auffi très-petite du même ordre.

Donc en négligeant toujours les quantités du fecond ordre, on aura par les formules de l'article 25, la vîteffe verticale $p = \frac{d\varphi'}{dx} = \frac{\theta}{\gamma}$, la vîteffe horifontale $\gamma = \varphi'' - z\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$

$$= \theta \left(\frac{d \cdot \frac{\mu}{\gamma}}{dx} - z \frac{d \cdot \frac{1}{\gamma}}{dx} \right) = \frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{d\mu}{dx} + (z - \mu) \frac{d\gamma}{\gamma dx} \right).$$

Ensuite, à cause de cos $\xi = 0$, la quantité λ'' sera aussi très-petite du premier ordre. Par conséquent, la valeur de λ se réduira à

$$\lambda' = -gx + \frac{d\theta}{dt} \int \frac{dx}{\gamma} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma^2}.$$

Cette valeur égalée à zéro, donnera la figure de la surface du fluide ; & comme elle ne renferme point l'ordonnée z, mais seulement l'abscisse x, & le tems t, il s'ensuit que la surface du fluide devra être à chaque instant plane & horizontale.

Enfin l'équation de condition pour que les mêmes particules soient toujours à la surface, se réduira par la même raison à celle-ci $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx} \times \frac{d\lambda'}{dx}$ (art. 27), savoir $\frac{d\lambda}{dt}$

$$+ \frac{\theta}{\gamma} \times \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

laquelle ne contient pas non plus z, mais seulement x & t.

29. Pour distinguer les quantités qui se rapportent à la surface supérieure du fluide de celles qui se rapportent à la surface inférieure, nous marquerons les premieres par un trait, & les secondes par deux traits. Ainsi, x', γ', &c, seront l'abscisse, la largeur du vase, &c, pour la surface supérieure ; x'', γ'', &c, seront de même l'abscisse, la largeur du vase, &c, à la surface inférieure.

Donc aussi λ', λ'' dénoteront dans la suite les valeurs de λ, pour les deux surfaces ; de sorte que l'on aura pour la surface supérieure, l'équation

λ'

$$\lambda' = -g x' + \frac{d\theta}{dt}\int\frac{dx'}{\gamma'} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma'} = 0,$$

& pour la ſurface inférieure, l'équation ſemblable,

$$\lambda'' = -g x'' + \frac{d\theta}{dt}\int\frac{dx''}{\gamma''} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma''} = 0.$$

Enfin, $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$ ſera l'équation de condition, pour que les mêmes particules qui ſont une fois à la ſurface ſupérieure y reſtent toujours ; & $\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{\theta}{\gamma''} \times \frac{d\lambda''}{dx''} = 0$, ſera l'équation de condition, pour que la ſurface inférieure contienne toujours les mêmes particules du fluide.

Cela poſé, il faut diſtinguer quatre cas dans la maniere dont un fluide peut couler dans un vaſe; & chacun de ces cas demande une ſolution particuliere.

30. Le premier cas eſt celui où une quantité donnée de fluide, coule dans un vaſe indéfini. Dans ce cas, il eſt viſible que l'une & l'autre ſurface doit toujours contenir les mêmes particules, & qu'ainſi on aura pour ces deux ſurfaces, les équations $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$, & de plus

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \cdot \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$$

$$\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{\theta}{\gamma''} \cdot \frac{d\lambda''}{dx''} = 0,$$

quatre équations qui ſerviront à déterminer les variables x', x'', θ, ϑ en t.

L'équation $\lambda' = 0$ étant différentiée, donne $\frac{d\lambda'}{dx'}dx' + \frac{d\lambda'}{dt}dt = 0$; donc $\frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{d\lambda'}{dx'} \times \frac{dx'}{dt}$; ſubſtituant cette

valeur dans l'équation $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$, & divisant par $\frac{d\lambda'}{dx'}$ on aura $\frac{dx'}{dt} = \frac{\theta}{\gamma'}$.

On trouvera de même en combinant l'équation $\lambda'' = 0$, avec l'équation $\frac{d\lambda''}{dt} = -\frac{d\lambda''}{dx''} \times \frac{dx''}{dt}$, celle-ci $\frac{dx''}{dt} = \frac{\theta}{\gamma''}$.

Donc on aura $\theta\, dt = \gamma'\, dx' = \gamma''\, dx''$, équations séparées; par conséquent on aura en intégrant

$$\int \gamma''\, dx'' - \int \gamma'\, dx' = m,$$

m étant une constante, laquelle exprime évidemment la quantité donnée du fluide qui coule dans le vase. Cette équation donnera ainsi la valeur de x'' en x'.

Maintenant si on substitue dans l'équation $\lambda' = 0$, pour dt sa valeur $\frac{\gamma'\, dx'}{\theta}$, elle devient $-g\,x' + \frac{\theta\, d\theta}{\gamma'\, dx'} \int \frac{dx'}{\gamma'} + \frac{\theta\, d\vartheta}{\gamma'\, dx'} + \frac{\theta^2}{2\gamma'^2} = 0$, laquelle étant multipliée par $-\gamma'\, dx'$ donne celle-ci $g\,\gamma'\, x'\, dx' - \theta\, d\theta \int \frac{dx'}{\gamma'} - \theta\, d\vartheta - \frac{\theta^2\, dx'}{2\gamma'} = 0$, qu'on voit être intégrable, & dont l'intégrale sera,

$$g \int \gamma'\, x'\, dx' - \frac{\theta^2}{2} \int \frac{dx'}{\gamma'} - \int \theta\, d\vartheta = const.$$

On trouvera de la même maniere, en substituant $\frac{\gamma''\, dx''}{\theta}$ à la place de dt dans l'équation $\lambda'' = 0$, & multipliant par $-\gamma''\, dx''$, une nouvelle équation intégrable, & dont l'intégrale sera

$$g \int \gamma''\, x''\, dx'' - \frac{\theta^2}{2} \int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \theta\, d\vartheta = const.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, pour

en éliminer le terme $\int \theta\, d\vartheta$; on aura celle-ci,

$$g\left(\int \gamma'' x'' dx'' - \int \gamma' x' dx'\right) - \frac{\theta^2}{2}\left(\int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \frac{dx'}{\gamma'}\right) = L,$$

dans laquelle les quantités $\int \gamma'' x'' dx'' - \int \gamma' x' dx$ & $\int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \frac{dx'}{\gamma'}$ expriment les intégrales de $\gamma x dx$, & de $\frac{dx}{\gamma}$ prises depuis $x = x'$ jusqu'à $x = x''$; & où L est une constante.

Cette équation donnera donc θ en x', puisque x'' est déja connue en x', par l'équation trouvée plus haut. Ayant ainsi θ en x', on trouvera aussi t en x', par l'équation $dt = \frac{\gamma' dx'}{\theta}$, dont l'intégrale est $t = \int \frac{\gamma' dx'}{\theta} + H$, H étant une constante arbitraire.

A l'égard des deux constantes L & H, on les déterminera par l'état initial du fluide. Car lorsque $t = 0$, la valeur de x' sera donnée par la position initiale du fluide dans le vase; & si on suppose que les vîtesses initiales du fluide soient nulles, il faudra que l'on ait $\theta = 0$, lorsque $t = 0$, pour que les expressions de p, q, r (art. 28), deviennent nulles. Mais si le fluide avoit été mis d'abord en mouvement par des impulsions quelconques, alors les valeurs de λ' & λ'' seroient données, lorsque $t = 0$, puisque la quantité λ rapportée à la surface du fluide exprime la pression que le fluide y exerce, & qui doit être contre-balancée par la pression extérieure (art. 2). Or on a (art. 29),

$$\lambda'' - \lambda' = -g(x'' - x') + \frac{d\theta}{dt}\left(\int \frac{dx''}{\gamma''} - \int \frac{dx'}{\gamma'}\right) - \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{1}{\gamma''^2} - \frac{1}{\gamma'^2}\right);$$

donc en faisant $t = 0$, on aura une équation, qui servira à déterminer la valeur initiale de θ.

Ainsi le problême est résolu, & le mouvement du fluide est entiérement déterminé.

31. Le second cas a lieu lorsque le vase est d'une longueur déterminée, & que le fluide s'écoule par le fond du vase. Dans ce cas on aura, comme dans le cas précédent, pour la surface supérieure, les deux équations $\lambda' = 0$ & $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$; mais pour la surface inférieure, on aura simplement l'équation $\lambda'' = 0$, puisqu'à cause de l'écoulement du fluide, il doit y avoir à chaque instant de nouvelles particules à cette surface. Mais d'un autre côté l'abscisse x'' pour cette même surface, sera donnée & constante; de sorte qu'il n'y aura que trois inconnues à déterminer, savoir x', θ, & ϑ.

Les deux premieres équations donnent d'abord, comme dans le cas précédent, celle-ci $dt = \frac{\gamma' dx'}{\theta}$ & $g\gamma' x' dx' - \theta d\theta \int \frac{dx'}{\gamma'} - \theta d\vartheta - \frac{\theta^2 dx'}{2\gamma'} = 0$; ensuite l'équation $\lambda'' = 0$ donnera $-gx'' + \frac{d\theta}{dt}\int\frac{dx''}{\gamma''} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma''^2} = 0$; où l'on remarquera que x'', γ'' & $\int\frac{dx''}{\gamma''}$, sont des constantes que nous dénoterons pour plus de simplicité par f, h, n. Ainsi en substituant à dt sa valeur $\frac{\gamma' dx'}{\theta}$, multipliant ensuite par $-\gamma' dx'$, on aura l'équation $gf\gamma' dx' - n\theta d\theta - \theta d\vartheta - \frac{\theta^2 dx'}{2h} = 0$.

Donc retranchant de celle-ci, l'équation précédente, pour en éliminer les termes $\theta d\vartheta$, on aura

$$g(f-x')\gamma' dx' - \left(n - \int \frac{dx'}{\gamma'}\right)\theta d\theta - \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{2\gamma}\right)\theta^2 dx' = 0,$$

équation qui ne contient que les deux variables x' & θ, & par laquelle on pourra donc déterminer une de ces variables en fonction de l'autre.

Ensuite on aura t exprimé par la même variable, en intégrant l'équation $dt = \frac{\gamma' dx'}{\theta}$. Et l'on déterminera les constantes par l'état initial du fluide, comme dans le problême précédent.

32. Le troisieme cas a lieu, lorsqu'un fluide coule dans un vase indéfini, mais qui est entretenu toujours plein à la même hauteur, par de nouveau fluide qu'on y verse continuellement. Ce cas est l'inverse du précédent; car on aura ici pour la surface inférieure, les deux équations $\lambda'' = 0$, & $\frac{d\lambda''}{dt} + \frac{\theta}{\gamma''} \times \frac{d\lambda''}{dx''} = 0$; & pour la surface supérieure, on aura simplement l'équation $\lambda' = 0$, à cause du changement continuel des particules de cette surface. Ainsi il n'y aura qu'à changer dans les équations de l'article précédent, les quantités x', γ' en x'', γ'', & prendre pour f, h, n les valeurs données de x', γ', $\int \frac{dx'}{\gamma'}$.

Au reste, nous supposons que l'addition du nouveau fluide se fait de maniere que chaque couche prend d'abord la vîtesse de celle qui la suit immédiatement, & qu'ainsi l'augmentation ou la diminution de vîtesse de cette couche, pendant le premier instant, est la même que si le vase n'étoit pas entretenu plein à la même hauteur durant cet instant.

33. Enfin le dernier cas eſt celui où le fluide ſort d'un vaſe de longueur déterminée, & qui eſt entretenu toujours plein à la même hauteur. Ici les particules des ſurfaces ſupérieure & inférieure ſe renouvellent entierement ; par conſéquent on aura ſimplement pour ces deux ſurfaces, les équations $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$; mais en même-tems les deux abſciſſes x' & x'' ſeront données & conſtantes, enſorte qu'il n'y aura que les deux inconnues θ & ϑ à déterminer en t.

Soit donc $x' = f$, $y' = h$, $\int \frac{dx'}{y'} = n$, $x'' = F$, $y'' = H$, $\int \frac{dx''}{y''} = N$, les deux équations $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$ deviendront,

$$-gf + \frac{d\theta}{dt}n + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2h^2} = 0,$$

$$-gF + \frac{d\theta}{dt}N + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2H^2} = 0,$$

d'où chaſſant $\frac{d\vartheta}{dt}$, on aura,

$$g(F-f) - (N-n)\frac{d\theta}{dt} - \left(\frac{1}{2H^2} - \frac{1}{2h^2}\right)\theta^2 = 0,$$

d'où l'on tire,

$$dt = \frac{(N-n)\,d\theta}{g(F-f) - \left(\frac{1}{2H^2} - \frac{1}{2h^2}\right)\theta^2},$$

équation ſéparée, & qui eſt intégrable par des arcs de cercle ou des logarithmes.

34. Les ſolutions précédentes ſont conformes à celles que les premiers Auteurs auxquels on doit des théories du mouvement des fluides, ont trouvées d'après la ſuppoſition que les différentes tranches du fluide conſervent exactement

leur parallélisme en descendant dans le vase. (*Voyez* l'Hydrodinamique de Daniel Bernoulli, l'Hydraulique de Jean Bernoulli, & le Traité des Fluides de M. d'Alembert). Notre analyse fait voir que cette supposition n'est exacte que lorsque la largeur du vase est infiniment petite; mais qu'elle peut, dans tous les cas, être employée pour une premiere approximation, & que les solutions qui en résultent sont exactes aux quantités du second ordre près, en regardant les largeurs du vase, comme des quantités du premier ordre.

Mais le grand avantage de cette analyse, est qu'on peut par son moyen approcher de plus en plus du vrai mouvement des fluides, dans des vases de figure quelconque; car ayant trouvé, ainsi que nous venons de le faire, les premieres valeurs des inconnues, en négligeant les secondes dimensions des largeurs du vase, il sera facile de pousser l'approximation plus loin, en ayant égard successivement aux termes négligés. Ce détail n'a de difficulté que la longueur du calcul, & nous n'y entrerons point quant à présent.

APPLICATION *des mêmes formules au mouvement d'un fluide contenu dans un canal peu profond, & presque horisontal, & en particulier au mouvement des ondes.*

35. Puisqu'on suppose la hauteur du fluide fort petite, il faudra prendre les ordonnées z verticales & dirigées de haut en bas, les abscisses x, & les autres ordonnées y deviendront horisontales, & l'on aura (art. 23), $\cos \xi = 0$, $\cos \eta = 0$, $\cos \zeta = 1$. En prenant les axes des x & y dans le plan horizontal, formé par la surface supérieure du fluide, dans l'état d'équilibre, soit $z = \alpha$, l'équation du fond du canal, α étant une fonction donnée de x & y.

Nous regarderons les quantités z & α comme très-petites du premier ordre, & nous négligerons les quantités du second ordre, & des ordres suivans, c'est-à-dire, celles qui contiendront les carrés & les produits de z & α.

L'équation de condition relative au fond du canal, donnera (art. 26),

$$\varphi'' = \frac{d.\varphi\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} + \frac{d.\varphi\frac{d\varphi'}{dy}}{dy},$$

d'où l'on voit que φ'' est une quantité du premier ordre.

Ensuite la valeur de la quantité λ se réduira à $\lambda' + \lambda'' z$ (art. 25); & il faudra négliger dans l'expression de λ' les quantités du second ordre, & dans celle de λ'', les quantités du premier. Ainsi, à cause de $\cos \xi = 0$, $\cos \eta = 0$, $\cos \zeta = 1$, on aura par les formules du même article.

$$\lambda' = \frac{d\varphi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2, \ \lambda'' = -g.$$

On aura donc (art. 27), pour la surface supérieure du fluide, l'équation $\lambda' - gz = 0$, & ensuite l'équation de condition,

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\varphi'}{dx} \times \frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\varphi'}{dy} \times \frac{d\lambda'}{dy} - g\varphi''$$
$$+ gz\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right) = 0.$$

L'équation $\lambda' - gz = 0$, donne sur le champ $z = \frac{\lambda'}{g}$ pour la figure de la surface supérieure du fluide à chaque instant, & comme l'équation de condition doit avoir lieu aussi relativement à la même surface, il faudra qu'elle soit vraie, en

en y substituant à z cette même valeur $\frac{\lambda'}{g}$. Cette équation deviendra donc par là de cette forme :

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d \cdot \lambda' \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} + \frac{d \cdot \lambda' \frac{d\varphi'}{dy}}{dy} - g\varphi'' = 0,$$

& substituant encore pour φ'' sa valeur trouvée ci-dessus, elle se réduira à celle-ci,

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d \cdot (\lambda' - g\alpha) \frac{d\varphi'}{dx}}{dx} + \frac{d \cdot (\lambda' - g\alpha) \frac{d\varphi'}{dy}}{dy} = 0,$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à mettre à la place de λ', sa valeur, $\frac{d\varphi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2$; & l'on aura une équation aux différences partielles du second ordre, qui servira à déterminer φ' en fonction de x, y, t.

Après quoi on connoîtra la figure de la surface supérieure du fluide, par l'équation,

$$z = \frac{d\varphi'}{g\,dt} + \frac{1}{g}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2;$$

& si on vouloit connoître aussi les vîtesses horisontales p, q de chaque particule du fluide, on les auroit par les formules $p = \frac{d\varphi'}{dx}$, $q = \frac{d\varphi'}{dy}$ (art. 25).

36. Le calcul intégral des équations aux différences partielles, est encore bien éloigné de la perfection nécessaire pour l'intégration d'équations aussi compliquées que celle dont il s'agit; & il ne reste d'autre ressource, que de simplifier cette équation, par quelque limitation.

Nous supposerons pour cela, que le fluide dans son

mouvement, ne s'éleve ni ne s'abaisse au-dessus ou au-dessous du niveau, qu'infiniment peu, ensorte que les ordonnées z, de la surface supérieure, soient toujours très-petites, & qu'outre cela, les vîtesses horisontales p & q, soient aussi infiniment petites. Il faudra donc que les quantités $\frac{d\varphi'}{dt}$, $\frac{d\varphi'}{dx}$, $\frac{d\varphi'}{dy}$ soient infiniment petites, & qu'ainsi la quantité φ' soit elle-même infiniment petite.

Ainsi négligeant dans l'équation proposée, les quantités infiniment petites du second ordre, & des ordres ultérieurs, elle se réduira à cette forme linéaire.

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} - g\,\frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - g\,\frac{d.\alpha\frac{d\varphi'}{dy}}{dy} = 0,$$

& l'on aura,

$$z = \frac{d\varphi'}{g\,dt},\ p = \frac{d\varphi'}{dx},\ q = \frac{d\varphi'}{dy}.$$

Cette équation contient donc la théorie générale des petites agitations d'un fluide peu profond, & par conséquent la vraie théorie des ondes formées par les élévations, & les abaissemens successifs, & infiniment petits d'une eau stagnante & contenue dans un canal ou bassin peu profond. La théorie des ondes que Newton a donnée dans la proposition quarante-sixieme du second Livre, étant fondée sur la supposition précaire & peu naturelle, que les oscillations verticales des ondes, soient analogues à celles de l'eau dans un tuyau recourbé, doit être regardée comme absolument insuffisante pour expliquer ce problême.

37. Si on suppose que le canal ou bassin ait un fond hori-

sontal, alors la quantité α sera constante & égale à la profondeur de l'eau ; & l'équation pour le mouvement des ondes deviendra,

$$\frac{d^2\phi'}{dt^2} = g\alpha\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right).$$

Cette équation est entierement semblable à celles qui détermine les petites agitations de l'air, dans la formation du son, en n'ayant égard qu'au mouvement des particules parallélement à l'horison, comme on le verra dans l'article 9 de la section suivante. Les élévations z, au-dessus du niveau de l'eau, répondent aux condensations de l'air, & la profondeur α de l'eau dans le canal, répond à la hauteur de l'atmosphere supposée homogène ; ce qui établit une parfaite analogie entre les ondes formées à la surface d'une eau tranquille par les élévations, & les abaissemens successifs de l'eau, & les ondes formées dans l'air, par les condensations & raréfactions successives de l'air, analogie que plusieurs Auteurs avoient déja supposée, mais que personne jusqu'ici n'avoit encore rigoureusement démontrée.

Ainsi comme la vîtesse de la propagation du son se trouve égale à celle qu'un corps grave acquerroit en tombant de la moitié de la hauteur de l'atmosphere supposée homogène, la vîtesse de la propagation des ondes, sera la même que celle qu'un corps grave acquerroit en descendant d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur de l'eau dans le canal. Par conséquent, si cette profondeur est d'un pied, la vîtesse des ondes sera de 5, 495 pieds par seconde; & si la profondeur de l'eau est plus ou moins grande, la vîtesse des ondes variera en raison soudoublée des profondeurs, pourvu qu'elles ne soient pas trop considérables.

Au reſte, quelle que puiſſe être la profondeur de l'eau, & la figure de ſon fond, on pourra toujours employer la théorie précédente, ſi on ſuppoſe que dans la formation des ondes l'eau n'eſt ébranlée & remuée, qu'à une profondeur très-petite, ſuppoſition qui eſt très-plauſible en elle-même, à cauſe de la ténacité & de l'adhérence mutuelle des particules de l'eau, & que je trouve d'ailleurs confirmée par l'expérience, même à l'égard des grandes ondes de la mer. De cette maniere donc la vîteſſe des ondes déterminera elle-même, la profondeur α à laquelle l'eau eſt agitée dans leur formation; car ſi cette vîteſſe eſt de n pieds par ſeconde, on aura $\alpha = \frac{n^2}{30,196}$ pieds

On trouve, dans le tome X des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, des expériences ſur la vîteſſe des ondes, faites par M. de la Hire, & qui ont donné un pied & demi par ſeconde pour cette vîteſſe, ou plus exactement 1, 412 pieds par ſeconde. Faiſant donc $n =$ 1, 412, on aura la profondeur α de $\frac{66}{1000}$ pied, ſavoir de $\frac{8}{10}$ de pouce ou 10 lignes à peu-près.

NEUVIEME SECTION.

Du mouvement des Fluides compreſſibles & élaſtiques.

1. POUR appliquer à cette ſorte de fluides, l'équation générale de l'article 2 de la Section précédente, on obſervera que le terme $S\lambda\delta L$ doit y être effacé, puiſque la condition de l'incompreſſibilité à laquelle ce terme eſt dû, n'exiſte

plus dans l'hypothèſe préſente ; mais d'un autre côté, il y faudra tenir compte de l'action de l'élaſticité qui s'oppoſe à la compreſſion, & qui tend à dilater le fluide.

Soit donc ϵ l'élaſticité d'une particule quelconque Dm du fluide ; comme ſon effet conſiſte à augmenter le volume $Dx\,Dy\,Dz$ de cette particule, & par conſéquent, à diminuer la quantité $-Dx\,Dy\,Dz$; il en réſultera pour cette particule le moment $-\epsilon\,\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ à ajouter au premier membre de la même équation. Deſorte qu'on aura pour toutes les particules, le terme intégral $-S\,\epsilon\,\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$ à ſubſtituer à la place du terme $S\lambda\,\delta L$. Or, δL étant $=\delta.(Dx\,Dy\,Dz)$, il eſt clair que l'équation générale demeurera de la même forme en y changeant ſimplement λ en $-\epsilon$. On parviendra donc auſſi par les mêmes procédés, à trois équations finales, ſemblables aux équations (A), ſavoir,

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)+\frac{D\epsilon}{Dx}&=0\\ \Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)+\frac{D\epsilon}{Dy}&=0\\ \Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)+\frac{D\epsilon}{Dz}&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (a).$$

Et il faudra de même que la valeur de ϵ ſoit nulle à la ſurface du fluide, ſi le fluide y eſt libre ; mais s'il eſt contenu par des parois, la valeur de ϵ ſera égale à la réſiſtance que les parois exercent pour contenir le fluide, ce qui eſt évident, puiſque ϵ exprime la force d'élaſticité de ſes particules.

2. Dans les fluides compreſſibles, la denſité Δ eſt toujours donnée par une fonction connue de ϵ, x, y, z, t, dé-

pendante de la loi de l'élasticité du fluide, & de celle de la chaleur qui est supposée regner à chaque instant, dans tous les points de l'espace. Il y a donc quatre inconnues, ϵ, x, y, z à déterminer en t, & par conséquent, il faut encore une quatrieme équation pour la solution complette du problême. Pour les fluides incompressibles, la condition de l'invariabilité du volume a donné l'équation *(B)* de l'article 3, & celle de l'invariabilité de la densité d'un instant à l'autre a donné l'équation *(H)* de l'article 11. Dans les fluides compressibles aucune de ces deux conditions n'a lieu en particulier, parce que le volume & la densité varient à la fois; mais la masse qui est le produit de ces deux élémens doit demeurer invariable. Ainsi on aura $d.\ Dm = 0$, ou bien $d.(\Delta Dx\, Dy\, Dz) = 0$. Donc, en différentiant logarithmiquement $\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{d.(Dx\, Dy\, Dz)}{Dx\, Dy\, Dz} = 0$, & substituant la valeur de $d.(Dx\, Dy\, Dz)$, (cette valeur est la même que celle de $\delta.(Dx\, Dy\, Dz)$ de l'article 2 de la Section précédente, en y changeant d en δ), on aura l'équation,

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{D\,dx}{Dx} + \frac{D\,dy}{Dy} + \frac{D\,dz}{Dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \ (b).$$

laquelle répond à l'équation *(B)* de l'article 3 de la Section citée, celle-là étant relative à l'invariabilité du volume, & celle-ci à l'invariabilité de la masse.

3. Si on regarde les coordonnées x, y, z, comme des fonctions des coordonnées primitives a, b, c, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement, les équations *(a)* deviendront, par des procédés semblables à ceux de l'article 5 de la Section précédente, de cette forme,

$$\left.\begin{aligned}
\theta\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)+\alpha\frac{d\epsilon}{da}+\beta\frac{d\epsilon}{db}+\gamma\frac{d\epsilon}{dc}=0\\
\theta\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)+\alpha'\frac{d\epsilon}{da}+\beta'\frac{d\epsilon}{db}+\gamma'\frac{d\epsilon}{dc}=0\\
\theta\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)+\alpha''\frac{d\epsilon}{da}+\beta''\frac{d\epsilon}{db}+\gamma''\frac{d\epsilon}{dc}=0
\end{aligned}\right\}\ldots(c).$$

ou de celle-ci plus ſimple,

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{da}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{da}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{da}\right)+\frac{d\epsilon}{da}=0\\
\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{db}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{db}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{db}\right)+\frac{d\epsilon}{db}=0\\
\Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{dc}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{dc}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{dc}\right)+\frac{d\epsilon}{dc}=0
\end{aligned}\right\}.(d)$$

ces transformées étant analogues aux transformées *(C)* & *(D)* de l'endroit cité.

A l'égard de l'équation *(b)*, en y appliquant les transformations de l'article 3 de la Section précédente, elle ſe réduira à cette forme $\frac{d\Delta}{\Delta}+\frac{d\theta}{\theta}=0$, les différentielles $d\Delta$ & $d\theta$ étant relatives uniquement à la variable t. De ſorte qu'en intégrant, on aura $\Delta\theta=$ fonct (a, b, c). Or lorſque $t=0$, nous avons vu dans l'article cité, que θ devient $=1$; donc ſi on ſuppoſe que H ſoit alors la valeur de Δ, on aura $H=$ fonct: (a, b, c), & l'équation deviendra $\Delta\theta=H$, ou bien $\theta=\frac{H}{\Delta}$; c'eſt-à-dire, en ſubſtituant pour θ ſa valeur,

$$\frac{dx}{da}\times\frac{dy}{db}\times\frac{dz}{dc}-\frac{dx}{db}\times\frac{dy}{da}\times\frac{dz}{dc}+\frac{dx}{db}\times\frac{dy}{dc}\times\frac{dz}{da}-\frac{dx}{dc}\times\frac{dy}{db}\times\frac{dz}{da}+\frac{dx}{dc}\times\frac{dy}{da}\times\frac{dz}{db}-\frac{dx}{da}\times\frac{dy}{dc}\times\frac{dz}{db}=\frac{H}{\Delta}\ldots(e).$$

transformée analogue à la transformée (E) de l'article cité.

Enfin il faudra appliquer auſſi à ces équations, ce qu'on a dit dans l'article 8 de la même Section, relativement à la ſurface du fluide.

4. Mais ſi l'on veut, ce qui eſt beaucoup plus ſimple, avoir des équations entre les vîteſſes p, q, r des particules ſuivant les directions des coordonnées x, y, z, en regardant ces vîteſſes ainſi que les quantités Δ & ε comme des fonctions de x, y, z, t, on emploiera les transformations de l'article 10 de la Section précédente, & les équations (a) donneront ſur le champ ces transformées analogues aux transformées (F) de ce dernier article,

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left(\frac{dp}{dt}+p\frac{dp}{dx}+q\frac{dp}{dy}+r\frac{dp}{dz}+X\right)+\frac{d\varepsilon}{dx}=0\\ \Delta\left(\frac{dq}{dt}+p\frac{dq}{dx}+q\frac{dq}{dy}+r\frac{dq}{dz}+Y\right)+\frac{d\varepsilon}{dy}=0\\ \Delta\left(\frac{dr}{dt}+p\frac{dr}{dx}+q\frac{dr}{dy}+r\frac{dr}{dz}+Z\right)+\frac{d\varepsilon}{dz}=0\end{aligned}\right\}\ldots(f)$$

Dans l'équation (b) outre la ſubſtitution de $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, au lieu de dx, dy, dz, & le changement de D en d, il faudra encore mettre pour $d\Delta$ ſa valeur complette,

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}+\frac{d\Delta}{dx}p+\frac{d\Delta}{dy}q+\frac{d\Delta}{dz}r\right)dt,$$

& l'on aura, en diviſant par dt, cette transformée;

$$\frac{d\Delta}{\Delta dt}+\frac{d\Delta}{\Delta dx}p+\frac{d\Delta}{\Delta dy}q+\frac{d\Delta}{\Delta dz}r+\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0,$$

laquelle étant multipliée par Δ, ſe réduit à cette forme plus ſimple,

$\frac{d\Delta}{dt}$

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{d.(\Delta p)}{dx} + \frac{d.(\Delta q)}{dy} + \frac{d.(\Delta r)}{dz} = 0 \ldots (g)$$

A l'égard de la condition relative au mouvement des particules à la ſurface, elle ſera repréſentée également par l'équation (I) de l'article 12 de la ſection précédente, ſavoir,

$$\frac{dA}{dt} + p\,\frac{dA}{dx} + q\,\frac{dA}{dy} + r\,\frac{dA}{dz} = 0 \ldots (i).$$

en ſuppoſant que $A = 0$, ſoit l'équation de la ſurface.

5. Il eſt aiſé de ſatisfaire à l'équation (g), en ſuppoſant $\Delta p = \frac{d\alpha}{dt}$, $\Delta q = \frac{d\beta}{dt}$, $\Delta r = \frac{d\gamma}{dt}$; α, β, γ étant des fonctions inconnues de x, y, z, t. Par ces ſubſtitutions, l'équation dont il s'agit deviendra

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{d^2\alpha}{dt\,dx} + \frac{d^2\beta}{dt\,dy} + \frac{d^2\gamma}{dt\,dz} = 0,$$

laquelle eſt intégrable, relativement à t, & dont l'intégrale donnera,

$$\Delta = F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz},$$

F étant une fonction arbitraire de x, y, z ſans t, dépendante de la loi de la denſité initiale du fluide.

On aura ainſi,

$$p = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}},$$

$$q = \frac{\frac{d\beta}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}},$$

$$r = \frac{\frac{d\gamma}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}}.$$

Donc ſubſtituant ces valeurs dans les équations (f), & mettant de plus pour ϵ ſa valeur en fonction de Δ, x, y, z, t (art. 2), on aura trois équations aux différences partielles entres les inconnues α, β, γ & les quatre variables x, y, z, t; & la ſolution du problême ne dépendra plus que de l'intégration de ces équations; mais cette intégration ſurpaſſe les forces de l'analyſe connue.

6. En faiſant abſtraction de la chaleur, & des autres circonſtances qui peuvent faire varier l'élaſticité indépendamment de la denſité, la valeur de l'élaſticité ϵ ſera donnée par une fonction de la denſité Δ, deſorte que $\frac{d\epsilon}{\Delta}$ ſera une différentielle à une ſeule variable, & par conſéquent intégrable, dont nous ſuppoſerons l'intégrale exprimée par E.

Soit de plus la quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ une différentielle complette, dont l'intégrale ſoit V, comme dans l'article 15 de la Section précédente.

Les équations (f) de l'article 4, étant multipliées reſpectivement par dx, dy, dz, & enſuite ajoutées enſemble, donneront après la diviſion par Δ une équation de la forme

$$\begin{aligned} -dE - dV = &\left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz}\right) dx \\ &+ \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz}\right) dy \\ &+ \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz}\right) dz \,.\; (l); \end{aligned}$$

dont le premier membre étant intégrable, il faudra que le ſecond le ſoit auſſi. Ainſi on aura de nouveau le cas de l'équation (L) de l'article 15 de la Section précédente, & on parviendra par conſéquent à des réſultats ſemblables.

7. Donc en général, si la quantité $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ se trouve dans un instant quelconque une différentielle complette, ce qui a toujours lieu au commencement du mouvement, lorsque le fluide part du repos, ou qu'il est mis en mouvement par une impulsion appliquée à la surface; alors la même quantité devra être toujours une différentielle complette (art. 17, 18, Sect. préc.).

Dans cette hypothèse on fera comme dans l'article 20 de la section précédente $p\,dx + q\,dy + r\,dz = d\varphi$, ce qui donne

$$p = \frac{d\varphi}{dx},\ q = \frac{d\varphi}{dy},\ r = \frac{d\varphi}{dz}.$$

& l'équation (l) étant intégrée après ces substitutions donnera,

$$E = -V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \cdot (m)$$

valeur qui satisfera en même-tems aux trois équations (f) de l'article 4.

Or E étant $= \int \frac{d\varepsilon}{\Delta}$ sera une fonction de Δ, puisque ε est une fonction connue de Δ; donc Δ sera une fonction de E. Substituant donc la valeur de Δ tirée de l'équation précédente, ainsi que celles de p, q, r dans l'équation (g) de l'article 4, on aura une équation en différences partielles de φ, laquelle ne contenant que cette inconnue suffira pour la déterminer. Desorte que toute la difficulté sera réduite à cette unique intégration.

8. Dans les fluides élastiques connus, l'élasticité est toujours proportionnelle à la densité; de sorte qu'on a pour

ces fluides $\varepsilon = i\Delta$, i étant un coëfficient conſtant qu'on déterminera en connoiſſant la valeur de l'élaſticité pour une denſité donnée.

Ainſi pour l'air l'élaſticité eſt égale au poids de la colonne de mercure dans le baromètre; donc ſi on nomme H la hauteur du baromètre pour une certaine denſité de l'air qu'on prendra pour l'unité, n la denſité du mercure, c'eſt-à-dire, le rapport numérique de la denſité du mercure à celle de l'air, rapport qui eſt le même que celui des gravités ſpécifiques, & g la force accélératrice de la gravité ; on aura lorſque $\Delta = 1$, $\varepsilon = gnH$; par conſéquent $i = gnH$; où l'on remarquera que nH eſt la hauteur de l'atmoſphere ſuppoſée homogene. Deſorte qu'en déſignant cette hauteur par h, on aura plus ſimplement $i = gh$, & delà $\varepsilon = gh\Delta$.

Donc puiſque $E = \int \frac{d\varepsilon}{\Delta}$, on aura $E = ghl.\Delta$. Or l'équation (g) de l'article 4 peut ſe mettre ſous la forme

$$\frac{d.l\Delta}{dt} + \frac{d.l\Delta}{dx}p + \frac{dl\Delta}{dy}q + \frac{dl\Delta}{dz}r + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$$

Donc ſubſtituant $\frac{E}{gh}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ à la place de $l\Delta, p, q, r$, & multipliant par gh, elle deviendra

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + \frac{dE}{dt} + \frac{dE}{dx} \times \frac{d\varphi}{dx}$$
$$+ \frac{dE}{dy} \times \frac{d\varphi}{dy} + \frac{dE}{dz} \times \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Il n'y aura donc plus qu'à ſubſtituer pour E ſa valeur trouvée ci-deſſus ; & cette ſubſtitution donnera l'équation finale en φ.

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)-\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$-\frac{dV}{dx}\times\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dV}{dy}\times\frac{d\varphi}{dy}-\frac{dV}{dz}\times\frac{d\varphi}{dz}$$

$$-2\frac{d\varphi}{dx}\times\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}-2\frac{d\varphi}{dy}\times\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}-2\frac{d\varphi}{dz}\times\frac{d^2\varphi}{dz\,dt}$$

$$-\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

$$-2\frac{d\varphi}{dx}\times\frac{d\varphi}{dy}\times\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}-2\frac{d\varphi}{dx}\times\frac{d\varphi}{dz}\times\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}$$

$$-2\frac{d\varphi}{dy}\times\frac{d\varphi}{dz}\times\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}=0\;\ldots\;(n)$$

laquelle contient ſeule la théorie du mouvement des fluides élaſtiques dans l'hypothèſe dont il s'agit.

9. Lorſque le mouvement du fluide eſt très-petit, & qu'on n'a égard qu'aux quantités très-petites du premier ordre, nous avons vu dans l'article 21 de la Section précédente que la quantité $p\,dx+q\,dy+r\,dz$ eſt auſſi néceſſairement une différentielle complette. Dans ce cas donc, les formules précédentes auront toujours lieu, de quelque maniere que le mouvement du fluide ait été engendré, pourvu qu'il ſoit toujours très-petit, & que par conſéquent la fonction φ ſoit elle-même très-petite.

Dans la théorie du ſon on ſuppoſe que le mouvement des particules de l'air eſt très-petit; ainſi, regardant dans l'équation (n) la quantité φ comme très-petite, & négligeant les termes où elle monte au-delà de la premiere dimenſion, on aura pour cette théorie, l'équation générale.

$$gh\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{d^2\phi}{dy^2}+\frac{d^2\phi}{dz^2}\right)-\frac{d^2\phi}{dt^2}$$
$$-\frac{dV}{dx}\times\frac{d\phi}{dx}-\frac{dV}{dy}\times\frac{d\phi}{dy}-\frac{dV}{dz}\times\frac{d\phi}{dz}=0.$$

Or en négligeant de même les ſecondes dimenſions de φ dans la valeur de E de l'article 7, on aura ſimplement, $E=-V-\frac{d\varphi}{dt}=ghl.\Delta$ (art. 8).

On peut ſuppoſer que la fonction φ ſoit nulle dans l'état de repos ou d'équilibre. On aura donc auſſi dans cet état $\frac{d\varphi}{dt}=0$, & par conſéquent $ghl.\Delta=-V$; & $\Delta=e^{\frac{-V}{gh}}$.

Lorſque l'air eſt en vibration, ſoit ſa denſité naturelle augmentée en raiſon de $1+s$ à 1, s étant une quantité fort petite, on aura donc en général $\Delta=e^{\frac{-V}{gh}}(1+s)$, & de là, en négligeant les carrés de s, on aura $l\Delta=-\frac{V}{gh}-s$; donc $s=\frac{d\varphi}{ghdt}$.

A l'égard de la valeur de V qui dépend des forces accélératrices, en ſuppoſant le fluide peſant, & prenant pour plus de ſimplicité les ordonnées z verticales, & dirigées de haut en bas, on aura par la formule de l'article 23 (Sect. préc.) $V=-gz$, g étant la force accélératrice de la gravité. Donc l'équation de la théorie du ſon ſera

$$gh\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+g\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

Ayant déterminé φ par cette équation, on aura les vîteſſes p, q, r de l'air, ainſi que ſa condenſation s par les formules $p=\frac{d\phi}{dx}$, $q=\frac{d\phi}{dy}$, $r=\frac{d\phi}{dz}$, $s=\frac{d\phi}{ghdt}$.

10. Si on ne veut avoir égard qu'au mouvement horiſontal de l'air, on ſuppoſera que la fonction φ ne contienne

point z, mais ſeulement x, y, t. Alors l'équation en φ deviendra :

$$g h\left(\frac{d^2 \varphi}{d x^2}+\frac{d^2 \varphi}{d y^2}\right)=\frac{d^2 \varphi}{d t^2}.$$

Mais avec cette ſimplification même, elle eſt encore trop compliquée pour pouvoir s'intégrer rigoureuſement.

Au reſte, cette équation eſt entierement ſemblable à celle du mouvement des ondes dans un canal horiſontal & p u profond. *Voyez* la Section précédente, article 37.

Juſqu'apréſent on n'a pu réſoudre complettement que le cas où l'on ne conſidère dans la maſſe de l'air qu'une ſeule dimenſion, c'eſt-à-dire, celui d'une ligne ſonore, dont les particules ne font que des excurſions longitudinales.

Dans ce cas, en prenant cette même ligne pour l'axe x, la fonction φ ne contiendra point y, & l'équation ci-deſſus ſe réduira à

$$g h \frac{d^2\varphi}{d x^2}=\frac{d^2 \varphi}{d t^2},$$

laquelle eſt ſemblable à celle des cordes vibrantes, & a pour intégrale complette

$$\varphi=F(x+t\sqrt{g h})+f(x-t\sqrt{g h}),$$

en dénotant par les caractériſtiques ou ſignes F & f, deux fonctions arbitraires.

Cette formule renferme deux théories importantes, celle du ſon des flûtes ou tuyaux d'orgue, & celle de la propagation du ſon dans l'air libre. Il ne s'agit que de déterminer convenablement les deux fonctions arbitraires ; & voici les principes qui doivent guider dans cette détermination.

11. Pour les flûtes, on ne considere que la ligne sonore, qui y est contenue; on suppose que l'état initial de cette ligne soit donné, cet état dépendant des ébranlemens imprimés aux particules, & on demande la loi des oscillations.

Faisons commencer les abscisses x à l'une des extrémités de cette ligne, & soit sa longueur, c'est-à-dire, celle de la flûte, égale à α. Les condensations s & les vîtesses longitudinales p, seront donc données, lorsque $t=0$, depuis $x=0$, jusqu'à $x=\alpha$; nous les nommerons S & P.

Maintenant puisque $s=\frac{d\varphi}{ghdt}$, & $p=\frac{d\varphi}{dx}$, si on différencie l'expression générale de φ de l'article précédent, & qu'on désigne par F' & f' les différentielles des fonctions marquées par F & f, ensorte que $F'x=\frac{dFx}{dx}$, $f'x=\frac{dfx}{dx}$, on aura,

$$p=F'(x+t\sqrt{gh})+f'(x-t\sqrt{gh}),$$
$$s\sqrt{gh}=F'(x+t\sqrt{gh})-f'(x-t\sqrt{gh}).$$

Faisant $t=0$, & changeant p en P, & s en S, on aura

$$P=F'x+f'x,\ S\sqrt{gh}=F'x-f'x.$$

Ainsi comme, P & S sont données pour toutes les abscisses x, depuis $x=0$, jusqu'à $x=\alpha$, on aura aussi dans cette étendue, les valeurs de $F'x$ & de $f'x$; par conséquent, on aura les valeurs de p & s pour une abscisse & un tems quelconque, tant que $x\pm t\sqrt{gh}$ seront renfermées dans les limites 0 & α.

Mais le tems t croissant toujours les quantités $x+t\sqrt{gh}$, & $x-t\sqrt{gh}$, sortiront bientôt de ces limites; & la détermination des

des fonctions $F'(x+t\sqrt{gh})$, $f'(x-t\sqrt{gh})$, dépendra alors des conditions qui doivent avoir lieu aux extrémités de la ligne sonore, selon que la flûte sera ouverte ou fermée.

12. Supposons d'abord la flûte ouverte par ses deux bouts, ensorte que la ligne sonore y communique immédiatement avec l'air extérieur; il est clair que son élasticité dans ces deux points, ne pouvant être contrebalancée que par la pression constante de l'atmosphere, la condensation s y devra être toujours nulle. Il faudra donc que l'on ait dans ce cas $s=0$, lorsque $x=0$, & lorsque $x=a$, quelle que soit la valeur de t; ce qui donne les deux conditions à remplir,

$$F'(t\sqrt{gh})-f'(-t\sqrt{gh})=0$$

$$F'(a+t\sqrt{gh})-f'(a-t\sqrt{gh})=0;$$

lesquelles devront subsister toujours, t ayant une valeur positive quelconque.

Donc en général, en prenant pour z une quantité quelconque positive, on aura,

$$F'(a+z)=f'(a-z) \text{ \&}$$

$$f'(-z)=F'z.$$

Donc 1°. tant que z est $<a$, on connoîtra les valeurs de $F'(a+z)$, & de $f'(-z)$, puisqu'elles se réduisent à celles de $f'(a-z)$, & de $F'z$ qui sont données.

Mettons dans ces formules $a+z$, au lieu de z, elles donneront,

$$F'(2a+z)=f'(-z)=F'z$$

$$f'(-a-z)=F'(a+z)=f'(a-z).$$

Donc 2°, tant que z sera $<a$, on connoîtra aussi les va-

valeurs de $F'(2a+z)$, & de $f'(-a-z)$, puisqu'elles se réduisent à celles de $F'z$, & de $f'(a-z)$ qui sont données.

Mettons de nouveau dans les dernieres formules $a+z$ pour z, & les combinant avec les premieres, puisque z peut être quelconque, on aura,

$$F'(3a+z)=F'(a+z)=f'(a-z),$$

$$f'(-2a-z)=f'(-z)=F'z.$$

Donc 3° tant que z sera $< a$, on connoîtra encore les valeurs de $F'(3a+z)$, & de $f'(-2a-z)$, puisqu'elles se réduisent aux valeurs données de $F'z$, & de $f'(a-z)$.

On trouvera de même, en mettant de rechef $a+z$ pour z

$$F'(4a+z)=f'(-z)=F'z$$

$$f'(-3a-z)=F'(a+z)=f'(a-z).$$

D'où l'on connoîtra 3° les valeurs de $F'(4a+z)$ & de $f'(-3a-z)$, tant que z sera $< a$.

Et ainsi de suite.

On aura donc de cette maniere, les valeurs des fonctions $F'(x+t\sqrt{gh})$, & de $f'(x-t\sqrt{gh})$, quelque soit le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement de la ligne sonore ; ainsi on connoîtra pour chaque instant l'état de cette ligne, c'est-à-dire, les vîtesses p, & les condensations s de chacune de ses particules.

Et il est visible par les formules précédentes que les valeurs de ces fonctions demeureront les mêmes en augmentant la quantité $t\sqrt{gh}$, de $2a$, ou de $4a$, $6a$, &c. Desorte que la ligne sonore reviendra exactement au même état, après chaque

intervalle de tems déterminé par l'équation $t\sqrt{gh} = 2a$; ce qui donne $\frac{2a}{\sqrt{gh}}$ pour cet intervalle.

Ainsi la durée des oscillations de la ligne sonore est indépendante des ébranlemens primitifs, & dépend seulement de la longueur a de cette ligne & de la hauteur h de l'atmosphere.

En supposant la force accélératrice de la gravité g égale à l'unité, il faut prendre pour l'unité des espaces, le double de celui qu'un corps pesant parcourt librement dans le tems qu'on prend pour l'unité (Section II, art. 2). Donc si on prend, ce qui est permis, h pour l'unité des espaces, l'unité des tems sera celui qu'un corps pesant met à descendre de la hauteur $\frac{h}{2}$; & le tems d'une oscillation de la ligne sonore, sera exprimé par $2a$. Ou, ce qui revient au même, le tems d'une oscillation sera à celui de la chute d'un corps par la hauteur $\frac{h}{2}$ comme $2a$ à h.

13. Si la flûte étoit fermée par ses deux bouts, alors les condensations s pourroient y être quelconques, puisque l'élasticité des particules y seroit soutenue par la résistance des cloisons; mais par la même raison, les vîtesses p y devroient être nulles; ce qui donneroit de nouveau les conditions.

$$F'(t\sqrt{gh}) + f'(-t\sqrt{gh}) = 0,$$

$$F'(a + t\sqrt{gh}) + f'(a - t\sqrt{gh}) = 0.$$

Ces formules reviennent à celles que nous avons examinées ci-dessus, en y supposant seulement la fonction mar-

quée par f' négative. Ainsi, il en résultera des conclusions semblables, & on aura encore la même expression pour la durée des oscillations de la fibre sonore.

Il n'en seroit pas de même, si la flûte étoit ouverte par un bout, & fermée par l'autre.

Il faudroit alors que s fût toujours nulle dans le bout ouvert, & que p le fût dans le bout fermé.

Ainsi en supposant la flûte ouverte ou $x = 0$, & fermée ou $x = a$, on auroit les conditions

$$F'(t\sqrt{gh}) - f'(-t\sqrt{gh}) = 0,$$
$$F'(a + t\sqrt{gh}) + f'(a - t\sqrt{gh}) = 0.$$

D'où par une analyse semblable à celle de l'article 12, on tirera les formules suivantes,

$$F'(a+z) = -f'(a-z), f'(-z) = F'z,$$
$$F'(2a+z) = -F'z, f'(-a-z) = -f'(a-z),$$
$$F'(3a+z) = f'(a-z), f'(-2a-z) = -F'z,$$
$$F'(4a+z) = F'z, f'(-3a-z) = f'(a-z).$$

& ainsi de suite.

Or tant que z est $< a$, les fonctions $F'z$ & $f'(a-z)$, sont données par l'état primitif de la fibre sonore; donc on connoîtra aussi par leur moyen les valeurs des autres fonctions

$$F'(a+z), F'(2a+z) \ \&c, f'(-z), f'(-a-z) \ \&c;$$

& par conséquent, on aura l'état de la fibre, après un tems quelconque t.

Mais on voit par les formules précédentes, que cet état ne reviendra le même, qu'après un intervalle de tems déterminé par l'équation $t\sqrt{gh} = 4a$; d'où il s'enſuit que la durée des vibrations ſera une fois plus longue que dans les flûtes ouvertes ou fermées par les deux bouts; & c'eſt ce que l'expérience confirme, à l'égard des jeux d'orgue qu'on nomme *bourdons*, & qui étant bouchés par leur extrémité ſupérieure, oppoſée à la bouche, donnent un ton d'une octave plus bas que s'ils étoient ouverts.

Voyez au reſte ſur la théorie des flûtes, les deux premiers volumes de Turin, les Mémoires de Paris pour 1762, & les *Novi Commentarii* de Pétersbourg, Tome XVI.

14. Conſidérons maintenant une ligne ſonore d'une longueur indéfinie, qui ne ſoit ébranlée au commencement, que dans une très-petite étendue, on aura le cas des agitations de l'air produites par les corps ſonores.

Suppoſons donc que les agitations initiales ne s'étendent que depuis $x = 0$, juſqu'à $x = a$, a étant une quantité très-petite. Les vîteſſes p, & les condenſations initiales P, S, ſeront donc données pour toutes les abſciſſes x, tant poſitives que négatives; mais elles n'auront de valeurs réelles que depuis $x = 0$, juſqu'à $x = a$; hors de ces limites, elles ſeront tout-à-fait nulles. Il en ſera donc auſſi de même des fonctions $F'x$, & $f'x$, puiſqu'en faiſant $t = 0$, on a $P = F'x + f'x$, $S\sqrt{gh} = F'x - f'x$, & par conſéquent $F'x = \frac{P + S\sqrt{gh}}{2}$, $f'x = \frac{P - S\sqrt{gh}}{2}$.

D'où il s'enſuit, qu'en prenant pour z une quantité poſitive, moindre que a, les fonctions $F'(x + t\sqrt{gh})$ & $f'(x -$

$t\sqrt{gh}$), n'auront de valeurs réelles que tant qu'on aura $x \pm t\sqrt{gh} = z$. Par conséquent, après un tems quelconque t, les vîtesses p, & les condensations s seront nulles pour tous les points de la ligne sonore, excepté pour ceux qui répondront aux abscisses $x = z \mp t\sqrt{gh}$.

On explique par là, comment le son se propage, & comment il se forme successivement de part & d'autre du corps sonore, & dans des tems égaux, des fibres sonores, égales en longueur, à la fibre initiale a.

La vîtesse de la propagation de ces fibres sera exprimée par le coëfficient $\sqrt{gh}$; elle sera par conséquent constante & indépendante du mouvement primitif; ce que l'expérience confirme, puisque tous les sons forts ou foibles paroissent se propager avec une vîtesse sensiblement égale.

Quant à la valeur absolue de cette vîtesse, en faisant comme dans l'article 12, $g = 1$ & $h = 1$, elle deviendra aussi $= 1$. Or l'unité des vîtesses est ici celle qu'un corps pesant doit acquérir en tombant de la moitié de l'espace h, qui est pris pour l'unité (Section II. art. 2). Donc la vîtesse du son sera due à la hauteur $\frac{h}{2}$.

15. En supposant avec la plupart des Physiciens, l'air 850 fois plus léger que l'eau, & l'eau 14 fois plus légere que le mercure, on a 1 à 11900 pour le rapport du poids spécifique de l'air à celui du mercure. Or prenant la hauteur moyenne du baromètre de 28 pouces de France, il vient 333200 pouces, ou $27766\frac{2}{3}$ pieds pour la hauteur h d'une colonne d'air uniformément dense & faisant équilibre à la colonne de mercure dans le baromètre. Donc la vîtesse du

ſon ſera due à une hauteur de 13883 $\frac{1}{3}$ pieds, & ſera par conſéquent de 915 par ſeconde.

L'expérience donne environ 1088; ce qui fait une différence de près d'un ſixieme; mais cette différence ne peut être attribuée qu'à l'incertitude des réſultats fournis par l'expérience. Sur quoi voyez ſur-tout un Mémoire de feu M. Lambert, parmi ceux de l'Académie de Berlin, pour 1768.

16. Si la ligne ſonore étoit terminée d'un côté par un obſtacle immobile; alors la particule d'air contiguë à cet obſtacle, n'auroit aucun mouvement; par conſéquent, ſi a eſt la valeur de l'abſciſſe x qui y répond, il faudra que la vîteſſe p ſoit nulle, lorſque $x = a$, quelque ſoit t; ce qui donnera la condition

$$F'(a + t\sqrt{gh}) + f'(a - t\sqrt{gh}) = 0$$

Or on a vu que la fonction $f'(a - t\sqrt{gh})$ a une valeur réelle tant que $a - t\sqrt{gh} = z$ (art. 14); donc puiſque $F'(a + t\sqrt{gh}) = -f'(a - t\sqrt{gh})$, la fonction $F'(a + t\sqrt{gh})$, aura auſſi des valeurs réelles, lorſque $a - t\sqrt{gh} = z$, c'eſt-à-dire, lorſque $t\sqrt{gh} = a - z$. Par conſéquent la fonction $F'(x + t\sqrt{gh})$ ſera non-ſeulement réelle, lorſque $x + t\sqrt{gh} = z$, mais encore, lorſque $x + t\sqrt{gh} = 2a - z$; d'où il ſuit que dans ce cas les vîteſſes p, & les condenſations s ſeront auſſi réelles pour les abſciſſes $x = 2a - z - t\sqrt{gh}$.

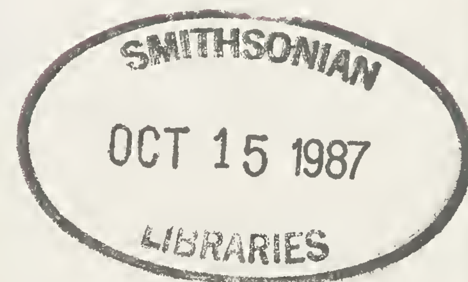
Ainſi la fibre ſonore après avoir parcouru l'eſpace a ſera comme réfléchie par l'obſtacle qu'elle rencontre, & rebrouſſera avec la même vîteſſe; ce qui donne une explication bien naturelle des échos ordinaires.

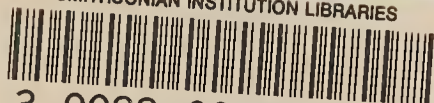
On expliquera de la même maniere les échos composés, en supposant que la ligne sonore soit terminée des deux côtés par des obstacles immobiles, qui réfléchiront successivement les fibres sonores, & leur feront faire des espèces d'oscillations continuelles. Sur quoi on peut voir les Ouvrages cités plus haut (art. 13), ainsi que les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1759 & 1765.

Fin de la Seconde Partie.

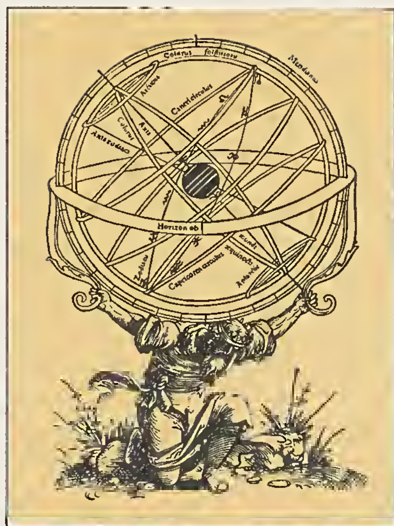
A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE PHILIPPE-DENYS PIERRES, Premier Imprimeur Ordinaire du Roi, &c.


SMITHSONIAN
OCT 15 1987
LIBRARIES








VIA · VERITAS · VITA